ЛЕКЦИЯ 9

Аннотация. Свойства накрытий.

Ниже все время будем считать, что $p : E \to B$ — накрытие со стандартным слоем F.

Пусть $\gamma : [0,1] \to B$ — путь из точки $b = \gamma(0)$ в точку $c = \gamma(1)$, а $\Gamma : [0,1] \to E$ — его поднятие, для которого $\Gamma(0) = a$ (так что $p(a) = b$). Обозначим $\widetilde{\nu}[\gamma](a) \stackrel{\text{def}}{=} \Gamma(1)$.

Лемма 1. *$\widetilde{\nu}[\gamma](a)$ не меняется при гомотопии пути γ с фиксированными концами.*

Доказательство. Пусть $f : [0,1]^2 \to B$ — гомотопия, соединяющая пути $\gamma_0(t) = f(t,0)$ и $\gamma_1(t) = f(t,1)$; при этом $f(0,s) = b$ и $f(1,s) = c$ при всех $0 \le s \le 1$. Согласно теореме о накрывающей гомотопии, существует отображение $F : [0,1]^2 \to E$ такое, что $p \circ F = f$ и $F(t,0) = \Gamma_0(t)$, где Γ_0 — поднятие γ_0. Имеем $F(0,s) \in p^{-1}(b)$; как обычно, в силу дискретности слоя $p^{-1}(b)$ получаем $F(0,s) = F(0,0) = \Gamma_0(0) = a$ при всех s. Следовательнро, $\Gamma_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} F(t,1)$ — поднятие пути γ_1, для которого $\Gamma_1(0) = a$.

С другой стороны, $F(1,s) \in p^{-1}(c)$ для всех $s \in [0,1]$, и в силу дискретности слоя получаем $F(1,s) = const$. Следовательно, $\widetilde{\nu}[\gamma_1](a) = \Gamma_1(1) = F(1,1) = F(1,0) = \Gamma_0(1) = \widetilde{\nu}[\gamma_0](a)$. □

Следствие 1 (свойство поднятия пути)**.** *Для всяких точек $b, c \in B$, произвольного класса гомотопии путей $u \in P_B(b,c)$ и произвольной точки $a \in p^{-1}(b) \subset E$ существует единствнная точка $d \in E$ и единственный класс гомотопии путей $v \in P_E(a,d)$ такой, что $p_* v = u$.*

Мы обозначим $d = \nu[u](a)$; тем самым $\nu[u]$ это отображение $p^{-1}(b) \to p^{-1}(c)$.

Теорема 1. *Пусть $b, c, e \in B$, $u, u_1 \in P_B(b,c)$, $u_2 \in P_B(c,e)$. Тогда $\nu[u_1 \cdot u_2] = \nu[u_2] \circ \nu[u_1]$, $\nu[\mathbf{1}_b] = \mathrm{id}_{p^{-1}(b)}$ и $\nu[u^{-1}] = \nu[u]^{-1}$ (откуда следует, что $\nu[u]$ — биекция). Иными словами, отображение ν, ставщее в соответствие произвольной точке $b \in B$ множество $p^{-1}(b) \subset E$, а произвольному классу гомотопии путей $u \in P_B(b,c) = \mathrm{Mor}_{\Pi_1(B)}(b,c)$ — отображение $\nu[u] : p^{-1}(b) \to p^{-1}(c)$, является функтором из гомотопического группоида $\Pi_1(B)$ в категорию множеств* **Set**.

Функтор из произвольной категории **C** в категорию множеств называется представлением **C**.

Доказательство. Пусть $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to B$ — представители классов гомотопии u_1, u_2, $\Gamma_1, \Gamma_2 : [0,1] \to E$ — их поднятия, для которых $\Gamma_1(0) = a$, $\Gamma_2(0) = \Gamma_1(1) = \nu[u_1](a)$. Тогда путь $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2 : [0,1] \to E$ — поднятие пути $\gamma_1 \cdot \gamma_2 : [0,1] \to B$, принадлежащего классу гомотопии $u_1 \cdot u_2$. Отсюда $\nu[u_1 \cdot u_2](a) = (\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)(1) = \Gamma_2(1) = \nu_2[u_2](\Gamma_2(0)) = \nu_2[u_2](\Gamma_1(1)) = \nu_2[u_2](\nu_1[u_1](a))$.

Утверждение $\nu[\mathbf{1}_b] = \mathrm{id}_{p^{-1}(b)}$ очевидно. Утверждение про обратное следует из первых двух: $\nu[u] \circ \nu[u^{-1}] = \nu[\mathbf{1}_b] = \mathrm{id}_{p^{-1}(b)}$. □

Фундаментальную группу $\pi_1(B,b)$ можно рассматривать как группоид с единственным объектом b, в которой элементы группы — морфизмы (из b в b). Тем самым это подкатегория $\Pi_1(B)$, и соответственно, отображение ν, ограниченное на классы гомотопии петель $u \in \pi_1(B,b)$, — представление этой категории. Представление группы называется ее действием на множестве (сопоставленном объекту b, в данном случае — на прообразе $p^{-1}(b) \subset E$). Иными словами (убедитесь!), действие группы G на множестве X это ее гомоморфизм A в группу биекций множества X (групповая операция — композиция). В данном случае $G = \pi_1(B,b)$, $X = p^{-1}(b)$ и $A = \nu$.

Зафиксируем точку $a \in p^{-1}(b) \subset E$ и назовем два класса гомотопии путей $u_1, u_2 \in P_B(b,c)$ эквивалентными, если $\nu[u_1](a) = \nu[u_2](a)$ (очевидно, что это отношение эквивалентности). В частности, если $c = b$, то два элемента фундаментальной группы $\pi_1(B,b) = P_B(b,b)$ эквивалентны, если лежат в одном и том же левом классе смежности группы $\pi_1(B,b)$ по ее подгруппе $p_*(\pi_1(E,a))$.

Лемма 2. *Классы $u_1, u_2 \in P_B(b,c)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда класс $u_1 \cdot u_2^{-1} \in \pi_1(B,b)$ принадлежит образу гомоморфизма $p_* : \pi_1(E,a) \to \pi_1(B,b)$, иными словами, если и только если найдется класс гомотопии петель $v \in \pi_1(E,a)$ такой, что $u_1 = p_*(v) \cdot u_2$.*

Доказательство. Обозначим $v_1 \in P_E(a,d_1)$ и $v_2 \in P_E(a,d_2)$ поднятия классов гомотопии u_1, u_2; здесь $d_i = \nu[u_i](a) \in p^{-1}(c)$, $i = 1,2$. Если классы эквивалентны, то $d_1 = d_2$, так что $v_1 = v \cdot v_2$, где $v = v_1 \cdot v_2^{-1} \in \pi_1(E,a)$, откуда $u_1 = p_*(v_1) = p_*(v) \cdot p_*(v_2) = p_*(v) \cdot u_2$. Обратно, поднятие $p_*(v)$ — класс гомотопии петель $v \in \pi_1(E,a)$, то есть $\nu[p_*(v)](a) = a$. Теперь если $u_1 = p_*(v) \cdot u_2$, то $\nu[u_1](a) = \nu[u_2](\nu[p_*(v)](a)) = \nu[u_2](a)$. □

Также можно описать это отношение эквивалентности по-другому: группа $\pi_1(E,a)$ (изоморфная, как было показано, подгруппе $p_*(\pi_1(E,a)) \subset \pi_1(B,b)$) действует на $P_B(b,c)$ умножением слева: $A(v)u = p_*(v) \cdot u$, где $v \in \pi_1(E,a)$, $u \in P_B(b,c)$. Это на самом деле действие: $A(v_1 \cdot v_2)u = p_*(v_1 \cdot v_2) \cdot u = p_*(v_1) \cdot p_*(v_2) \cdot u = A(v_1)(A(v_2)u)$. Тогда лемма 2 утверждает, что два класса эквивалентны тогда и только тогда, когда лежат в одной орбите этого действия.

То же самое на языке категорий. Для произвольных объектов b и c категории $\mathbf{C}$ полугруппа $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(b,b)$ (если $\mathbf{C}$ — группоид, то группа) действует на множестве $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(b,c)$: $A(u)v = u \circ v$ (A — действие). Если p — функтор из $\mathbf{D}$ в $\mathbf{C}$, переводящий объект a категории $\mathbf{D}$ в объект b, то образ отображения $p : \mathrm{Mor}_{\mathbf{D}}(a,a) \to \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(b,b)$ — подполугруппа (соотв., подгруппа) в $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(b,b)$. Следовательно, этот образ тоже действует на множестве $\mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(b,c)$. Мы называем два элемента этого множества $u_0, u_1 \in \mathrm{Mor}_{\mathbf{C}}(b,c)$ эквивалентными, если они принадлежат одной орбите указанного действия.

Замечание 1. Заметим, что введенное отношение зависит не только от b и c, но и от выбора точки $a \in p^{-1}(b)$. Если $p(a') = p(a) = b$ и a' лежит в той же компоненте связности пространства E, что и a, то, как было доказано в лекции 6, существует изоморфизм f между группами $\pi_1(E,a)$ и $\pi_1(E,a')$, заданный формулой $f(u) = w^{-1}uw$, где $w \in P_E(a,a')$ — произвольный класс гомотопии путей (один и тот же для всех u). Отсюда $p_*(f(u)) = p_*(w)^{-1}p_*(u)p_*(w)$. Здесь $p_*(w) \in P_B(p(a),p(a')) = P_B(b,b) = \pi_1(B,b)$. Тем самым получается, что образ гомоморфизма $p_* : \pi_1(E,a') \to \pi_1(B,b)$ отличается от образа гомоморфизма $p_* : \pi_1(E,a) \to \pi_1(B,b)$ сопряжением (посредством элемента $p_*(w) \in \pi_1(B,b)$, не лежащего, вообще говоря, ни в одном из этих образов). Если образ не был нормальной подгруппой, то он не совпадает с сопряженным, и отношение эквивалентности для точек a и a' разное.

Тем самым ν определяет отображение множества классов эквивалентности в $P_B(b,c)$ в множество $p^{-1}(c)$; при этом различные классы переходят в различные точки (т.е. это инъекция).

Лемма 3. *Если пространство E линейно связно, то указанное отображение — биекция.*

Доказательство. Если E линейно связно, то для всякой точки $d \in p^{-1}(c)$ множество $P_E(a,d)$ непусто. Пусть $v \in P_E(a,d)$; тогда $\nu[p_*v](a) = d$, то есть отображение — сюръекция. □

Следствие 2. *Количество (мощность множества) классов эквивалентности в $P_B(b,c)$ равно количеству элементов $\#F$ в стандартном слое. В частности ($c = b$), индекс подгруппы $p_*(\pi_1(E,a))$ в группе $\pi_1(B,b)$ равен $\#F$.*

Пример 1. Пусть $p : S^1 \to S^1$ — накрытие из примера 5 лекции 8 ($p(z) = z^n$). Согласно примеру 3 лекции 7 гомоморфизм $p_* : \mathbb{Z} = \pi_1(S^1,1) \to \pi_1(S^1,1) = \mathbb{Z}$ — умножение на n. Отсюда $p_*(\mathbb{Z}) = n\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$ имеет индекс $|n| = \#F$, как и утверждает следствие 2.

Пример 2. Рассмотрим накрытие $p : S^n \to \mathbb{R}P^n$ из примера 6 лекции 8. Пусть $n \geq 2$; тогда $\pi_1(S^n,a) = \{1\}$ для любого a (доказательство — упражнение, очень близкое к задаче 4б из листка 4). Следовательно, подгруппа $p_*(\pi_1(S^n,a)) \subset \pi_1(\mathbb{R}P^n,p(a))$ тривиальна. С другой стороны, ее индекс в группе, согласно следствию 2, равен $\#F = 2$, откуда вытекает, что группа состоит из двух элементов. Следовательно, фундаментальная группа вещественного проективного пространства размерности $n \geq 2$ есть $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.