2. НЕПРЕРЫВНОСТЬ И ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ КАТЕГОРИЯ.

Напомним, что объекты A и B категории $\mathbf{C}$ называются эквивалентными, если существуют морфизмы $f : A \to B$ и $g : B \to A$ такие, что $g \circ g = \mathrm{id}_A$, $f \circ g = \mathrm{id}_B$.

Задача 1. Докажите, что эквивалентные объекты неразличимы категорными средствами: существует обратимый функтор Φ из категории $\mathbf{C}$ в себя такой, что $\Phi(A) = B$, $\Phi(B) = A$.

Задача 2. а) Докажите, что отображение $f : A \to B$ (морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ категории **Set**) имеет правое обратное (т.е. существует морфизм $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ такой, что $f \circ g = \mathrm{id}_B \in \mathrm{Mor}(B, B)$) тогда и только тогда, когда $f(A) = B$. Верно ли то же самое утверждение для морфизмов категории **Top** (то есть для непрерывных отображений)? б) Докажите, что морфизм $f \in \mathrm{Mor}(A, B)$ категории **Set** (т.е. отображение $f : A \to B$) имеет левый обратный (т.е. морфизм $g \in \mathrm{Mor}(B, A)$ такой, что $g \circ f = \mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}(A, A)$) тогда и только тогда, когда $f(x) \neq f(y)$ для любых двух элементов $x, y \in A$ таких, что $x \neq y$. Верно ли то же самое утверждение для морфизмов категории **Top**?

Указание. Рассмотрите отображение $f : [0, 1) \to S^1 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, заданное формулой $f(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$.

Задача 3. Пусть $f : Y \to X$ — непрерывное отображение топологических пространств, для которого $f(Y) = X$. Определим на Y отношение эквивалентности $\sim_f$ таким правилом: $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$. Приведите пример, когда пространство $Y/\sim_f$ не гомеоморфно пространству X. Возможно ли это, если топология в Y — инъективная относительно отображения f? Придумайте условие на отображение f, при котором гомеоморфизм имеет место.

Задача 4. а) Докажите, что декартово произведение конечного числа метрических пространств метризуемо (т.е. топология на нем порождена какой-то метрикой). б) Докажите, что декартово произведение бесконечного несчетного числа пространств (состоящих более чем из одной точки) неметризуемо. в) Может ли произведение счетного числа метрических пространств быть метризуемо? Если да, то обязано ли?