5. КОМПАКТНОСТЬ.

Задача 1. Пусть $X_1 \supset X_2 \supset \dots$ — последовательность непустых вложенных хаусдорфовых компактов. Докажите, что $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n \neq \varnothing$. Можно ли отказаться от компактности хотя бы некоторых из X_i?

Задача 2. а) Докажите, что множество $\Delta_{n-1} \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1,\dots,x_n \geq 0, x_1+\dots+x_n = 1\}$ компактно. б) Докажите, что если $x, y \geq 0$ и $x \neq y$, то $xy < \left(\frac{x+y}{2}\right)^2$. в) Пусть $(x_1^*,\dots,x_n^*)$ — точка, в которой непрерывная функция $f : \Delta_{n-1} \to \mathbb{R}$, заданная формулой $f(x_1,\dots,x_n) = x_1 \dots x_n$, достигает своего наибольшего значения. Докажите, используя утверждение 2б, что $x_1^* = \dots = x_n^* = 1/n$. г) Докажите неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим: если $y_1,\dots,y_n \geq 0$, то $\sqrt[n]{y_1 \dots y_n} \leq \frac{y_1+\dots+y_n}{n}$. д) Докажите аналогичным способом неравенство между средним арифметическим и средним квадратическим: $\frac{y_1+\dots+y_n}{n} \leq \sqrt{\frac{y_1^2+\dots+y_n^2}{n}}$, е) между средним арифметическим и средним степени $\alpha \geq 1$: $\frac{y_1+\dots+y_n}{n} \leq \left(\frac{y_1^\alpha+\dots+y_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$, ж) между средними степеней α и β, $\alpha > \beta > 0$: $\left(\frac{y_1^\beta+\dots+y_n^\beta}{n}\right)^{1/\beta} \leq \left(\frac{y_1^\alpha+\dots+y_n^\alpha}{n}\right)^{1/\alpha}$.

Пусть $k = (k_1, k_2, \dots)$ — последовательность натуральных чисел, а Γ_k — бесконечное регулярное дерево, то есть ориентированный граф, у которого есть 1 вершина — корень, из которой выходят ребра в k_1 вершин первого уровня. В каждую вершину первого уровня входит одно ребро (из корня) и выходит k_2 ребер в вершины второго уровня и т.д. Пусть X_k — множество бесконечных путей в графе Γ_k, начинающихся в корне и идущих по ребрам (согласованно с направлением). Введем на X_k топологию, базой которой являются множества U_a, где a — вершина Γ_k: множество U_a состоит из всех путей, проходящих через a.

Задача 3. а) Докажите, что X_k с введенной топологией компактно. б) Пусть $\Gamma \subset \Gamma_k$ — бесконечный связный подграф (то есть бесконечное подмножество множества вершин Γ и все ребра Γ_k, соединяющие вершины, вошедшие в Γ; связность понимается в комбинаторном смысле), содержащий корень. Докажите, что в Γ имеется по крайней мере один бесконечный путь, начинающийся в корне и идущий по ребрам (согласованно с направлением). в) Приведите контрпример к утверждению пункта 3б в случае, когда хотя бы одно из k_i — не натуральное число, а бесконечность (вершины соответствующего уровня в Γ_k имеют бесконечную валентность). Где в этом случае не работает доказательство из пунктов 3а и 3б?

Обычная формулировка задачи 3б: человечество живет вечно, но число людей в каждом поколении конечно. Докажите, что найдется бесконечная цепочка потомков-мужчин.