Листок 1.

Задача 1. Пусть $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ и $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$. Докажите, что пространства $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ и $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_2)$ полны, гомеоморфны, но не изометричны.

Задача 2. Докажите, что в полном нормированном пространстве всякая последовательность вложенных замкнутых шаров имеет общую точку.

Задача 3*. Пусть линейное пространство X с нормой $\|\cdot\|_1$ полно и с нормой $\|\cdot\|_2$ полно. Используя теорему Бэра докажите, что из оценки $\|\cdot\|_1 \le C_1\|\cdot\|_2$ следует $\|\cdot\|_2 \le C_2\|\cdot\|_1$.

Задача 4. Пусть $f_n, f \in C^\infty[0,1]$. Будем говорить, что $f_n \to f$, если

$$\max_{x\in[0,1]}\left|f_n^{(j)}(x) - f^{(j)}(x)\right| \to 0$$

при $n \to \infty$ для всех $j \ge 0$. Докажите, что такая сходимость задается метрикой, но не задается нормой.

Задача 5. Докажите, что полное бесконечномерное пространство нельзя представить в виде счетного объединения конечномерных пространств. Можно ли на пространстве многочленов ввести норму так, что оно станет полным?

Пусть X, Y – векторные пространства над $\mathbb{R}$. Отображение $L\colon X \mapsto Y$ называется линейным, если $L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$ для всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ и $x, y \in X$. Линейное отображение еще называют линейным оператором. Если $Y = \mathbb{R}$, то L называют линейным функционалом.

Задача 6. Пусть $L, L_1, \ldots, L_n$ – линейные функционалы и ядро L содержит $\cap_k \mathrm{Ker}\, L_k$. Докажите, что $L = c_1L_1 + \ldots + c_nL_n$.

Задача 7. Докажите, что непрерывность линейного функционала равносильна замкнутости его ядра. Верно ли аналогичное утверждение для линейных операторов?

Задача 8. Докажите, что нормированное пространство X конечномерно тогда и только тогда, когда всякий линейный функционал на X непрерывен.

Положим

$$\|L\| = \sup_{x\colon \|x\|\le 1} \|L(x)\|$$

Задача 9.

(a) Докажите, что величина $\|L\|$ конечна тогда и только тогда, когда L – непрерывный оператор.

(b) Докажите, что $\|L\|$ – норма на линейном пространстве непрерывных линейных операторов.

(c) Докажите, что $\|L_1 \circ L_2\| \le \|L_1\|\|L_2\|$.

(d)* Докажите, что пространство линейных непрерывных операторов со значениями в полном нормированном пространстве является полным пространством относительно нормы $\|L\|$.

Задача 10. Пусть $L(x) = Ax\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, где A – матрица $n \times n$ и рассматривается пространство $\mathbb{R}^n$ с евклидовой нормой. Докажите, что $\|L\|$ равна $\sqrt{\lambda}$, где λ – наибольшее собственное значение матрицы A^*A.

Задача 11. Возьмем на $\mathbb{R}^n$ норму $\|x\| = \max|x_i|$. Найдите норму оператора, заданного матрицей A.

Задача 12. Пусть L – линейный непрерывный оператор на полном нормированном пространстве.

(a) Докажите, что ряд $e^L = \sum_{n=0}^\infty \frac{L^n}{n!}$ сходится по норме в пространстве непрерывных операторов.

(b) Пусть $L_1 \circ L_2 = L_2 \circ L_1$. Докажите, что $e^{L_1+L_2} = e^{L_1} \circ e^{L_2}$.