НМУ, I курс, 05.03.2021

Листок 2.

Отображение $f\colon N \mapsto M$ называется дифференцируемым (по Фреше) в точке $a \in N$, если f определено в окрестности точки a и существует такой линейный непрерывный оператор $L_a\colon N \mapsto M$, что

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(a+h)-f(a)-L_a(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

Линейный оператор L называют дифференциалом отображения f в точке a и обозначают через $df(a,h)$.

Задача 1. Докажите, что следующие отображения дифференцируемы на своей области определения и найдите их дифференциалы:

(a) $f(x) = L(x)$ – линейный непрерывный оператор;

(b) $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|^2 = x_1^2 \ldots + x_n^2$;

(c) $f\colon M^n \mapsto M^n$, $f(x) = x^k$, где M^n – матрицы $n \times n$;

(d) $f\colon M^n \mapsto M^n$, $f(x) = x^{-1}$;

(e) $f\colon M^n \mapsto M^n$, $f(x) = e^x$;

(f) $f\colon M^n \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = \det x$;

Предел

$$\partial_h f(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th)-f(a)}{t}$$

называют производной по вектору h. Если $\|h\| = 1$, то $\partial_h f(a)$ называют производной по направлению h.

Если существует такой линейный непрерывный оператор $L_a\colon N \mapsto M$, что равенство $\partial_h f(a) = L_a(h)$ выполнено для всякого $h \in N$, то говорят, что отображение $f\colon N \mapsto M$ дифференцируемо по Гато в точке $a \in N$.

Задача 2. (a) Докажите, что дифференцируемость по Фреше влечет дифференцируемость по Гато, но обратное неверно.

(b) Приведите пример функции $f\colon \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, у которой для всякого h существует $\partial_h f(0)$, но функция f не дифференцируема по Гато в $x = 0$.

(c) Пусть $f\colon N \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема по Гато в окрестности точки a и отображение $b \mapsto L_b$ непрерывно в точке a. Докажите, что f дифференцируема по Фреше в точке a.

Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ дифференцируема в точке a. Тогда $df(a,\cdot)$ – линейное отображение $\mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ и его можно записать в виде $df(a,h) = c_1h_1 + \ldots + c_nh_n$. Вектор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ называется градиентом функции f точке a и обозначается через $\nabla f(a)$ или $\mathrm{grad} f(a)$.

Задача 3. Докажите, что

(a) $c_k = \partial_{e_k} f(a)$, где $e_k = (0,0,\ldots,1,0,\ldots 0)$ (выражение $\partial_{e_k} f(a)$ обозначают через $\frac{\partial f(a)}{\partial x_k}$ и называют частной производной по x_k);

(b) $\max_{\|h\|=1} \partial_h f(a) = \|\mathrm{grad} f(a)\|$.

Задача 4. Пусть U – открытое множество в $\mathbb{R}^2$, функция $f\colon U \to \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема и $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$ на U. Верно ли, что f не зависит от x?

Задача 5. (a) Пусть кривая $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$, $t \in [0,1]$, задана непрерывно дифференцируемыми функциями $x_k(t)$ Предположим в каждой точке кривой вектор скорости $\dot\gamma$ перпендикулярен градиенту функции f. Докажите, что f постоянна на γ.

(b) Опишите все дифференцируемые функции $f(x,y)$, удовлетворяющие уравнению $a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, где a, b – некоторые числа.

Задача 6. Приведите пример функции f двух переменных, у которой

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0).$$

Задача 7. Пусть $g\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ – дважды дифференцируемое отображение (т. е. $g = (g_1, \ldots, g_m)$ и g_i – дважды дифференцируемые функции из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$). Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ – дважды дифференцируемая функция. Найдите $d^2(f \circ g)$. Запишите при $n = 3$ оператор Лапласа $\Delta f = f_{x_1x_1} + \ldots + f_{x_nx_n}$ в сферической системе координат.

Задача 8. Исследуйте на экстремум функцию $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.

Задача 9. Найдите все критические точки (точки, в которых $\operatorname{grad} f = 0$) функции

$$f(x, y) = 3xy - x^3 - y^3$$

и классифицируйте их.

Будем говорит, что функция f на $\mathbb{R}^n$ выпукла, если

$$f(\alpha x + (1-\alpha)y) \le \alpha f(x) + (1-\alpha) f(y)$$

для всех x, y и всех $\alpha \in [0, 1]$.

Задача 10. (a) Пусть f – дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству

$$\langle \operatorname{grad} f(x) - \operatorname{grad} f(y), x - y\rangle \ge 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(b) Пусть f – дважды непрерывно дифференцируемая функция. Докажите, что выпуклость функции f равносильна неравенству $d^2 f(h) \ge 0$.

Задача 11. Пусть $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция. Докажите, что из дифференцируемости функции f по Гато в точке a следует дифференцируемость f по Фреше в этой точке.

Задача 12.(Метод градиентного спуска) Пусть функция f дважды непрерывно дифференцируема и $m\|h\|^2 \le d^2 f(h) \le M\|h\|^2$, где $m, M > 0$. Пусть $x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot \operatorname{grad} f(x_n)$, где $0 < \gamma < 2/M$. Докажите, что последовательность x_n сходится к точке минимума функции f. Проиллюстрируйте этот метод на примере функции $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$.