Листок 4.

Задача 1. Пусть $\mathcal{A}$ состоит из множеств, которые являются объединением конечного числа дизъюнктных полуинтервалов $[a,b) \in [0,1)$. Докажите, что $\mathcal{A}$ является алгеброй, но не является сигма-алгеброй.

Задача 2. Пусть S – некоторый класс множеств в X. Пусть A_1 – пустое множество, множества из набора S и их дополнения. Через A_2 обозначим набор всех конечных пересечений множеств из A_1. Докажите, что набор A_3, состоящий из всех конечных объединений множеств из A_2, совпадает с алгеброй, порожденной набором S.

Задача 3. Пусть $\mathcal{A}$ – сигма-алгебра и множество $S \notin \mathcal{A}$. Докажите, что

$$\sigma(\{\mathcal{A}, S\}) = \Big\{(A \cap S) \cup (B \cap (X \setminus S))\colon A, B \in \mathcal{A}\Big\}.$$

Задача 4. Докажите, что всякое множество $A \subset \sigma(S)$ принадлежит $\sigma(\{S_n\})$ для некоторого не более чем счетного набора множеств S_n из S.

Задача 5. Докажите, что борелевская сигма-алгебра $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ совпадает с сигма-алгеброй порожденной (a) всеми интервалами с рациональными концами, (b) всеми замкнутыми лучами, (c) всеми отрезками.

Задача 6. Пусть f_n – последовательность $(X, \mathcal{A})$ – измеримых функций. Докажите, что функции $\sup_n f_n(x)$ и $\inf_n f_n(x)$ измеримы. Приведите пример, что для несчетного набора функций это утверждение неверно.

Задача 7.

(a) Пусть $f\colon \mathbb{R} \times Y \to \mathbb{R}$ и при каждом y функция $x \to f(x,y)$ непрерывна на $\mathbb{R}$, а при каждом x функция $y \to f(x,y)$ измерима относительно сигма алгебры $\mathcal{A}$ на Y. Докажите, что f измерима относительно сигма-алгебры $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{A}$.

(b) Пусть $f(x,y)$ при каждом y интегрируема по Риману на $[a,b]$ по x, и при каждом x эта функция является $(Y, \mathcal{B})$ – измеримой по y. Докажите, что

$$F(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$$

является измеримой функцией на $(Y, \mathcal{B})$.

Задача 8. Пусть f измерима относительно сигма-алгебры, порожденной функцией g (т.е. относительно $g^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R}))$). Докажите, что $f = F(g)$ для некоторой борелевской функции F.

Задача 9. На алгебре, состоящей из конечных объединений попарно непересекающихся полуинтервалов $[a,b)$ в $\mathbb{R}$ задана мера μ формулой $\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$, где F – монотонная ограниченная и непрерывная слева функция на $\mathbb{R}$. Докажите, что существует компактный класс, приближающий меру μ.

Задача 10.

(a) Докажите, что всякое открытое множество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде не более чем счетного объединения дизъюнктных открытых шаров и множества меры нуль.

(b) Докажите, что если $L(x) = b + Cx$, то $\lambda(C(A)) = |\mathrm{det}C|\lambda(A)$.

(c) Пусть μ – вероятностная борелевская мера на единичном кубе. Предположим, что для любых двух множеств B_1 и B_2, отличающихся сдвигом, верно равенство $\mu(B_1) = \mu(B_2)$. Докажите, что μ – мера Лебега.

Задача 11. Докажите, что на прямой есть такое борелевское множество B, что для всякого интервала I множества $B \cap I$ и $(\mathbb{R} \setminus B) \cap I$ имеют положительную меру Лебега.

Задача 12. Пусть A – множество положительной меры Лебега на числовой прямой. Докажите, что множество $A - A$ содержит интервал.