§7. Линейные операторы и корреляции.

Основные определения и соглашения. На протяжении всей этой темы символом V обозначается векторное пространство над основным полем k.
Ненулевой вектор $v \in V$ называется *собственным вектором* линейного оператора $A : V \to V$ с *собственным числом* λ, если $Av = \lambda v$.
Множество собственных векторов, отвечающих собственному числу λ, образует векторное подпространство в V, которое мы будем обозначать через V_λ и называть *собственным подпространством оператора.*

Корневым вектором линейного оператора A, отвечающим собственному числу λ, называется такой вектор $v \in V$, для которого найдется такое натуральное число n, что $(A - \lambda E)^n = 0$ (E — единичный или тождественный оператор на V).

Множество всех корневых векторов, отвечающих собственному числу λ линейного оператора A, образует векторное пространство $L(\lambda)$, которое нвазывается *корневым подпространством* линейного оператора A.

Характеристическим многочленом оператора A называется многочлен $\chi_A(t) = \det(A - tE)$, где A — матрица линейного оператора A в некотором базисе, A — единичная матрица. Характеристический многочлен не зависит от выбора базиса; его корни называются *собственными или характеристическими значениями* оператора A.

Подпространство $U \subset V$ называется *инвариантным* относительно оператора A (или A-инвариантным), если $AU \subset U$.

7.1. Инвариантные подпространства.

7.1.1. Докажите A-инвариантность следующих подпространств:

$$\ker A,\ \operatorname{im} A,\ \operatorname{im} A^r,\ V_\lambda,\ L(\lambda).$$

7.1.2. Докажите, что собственнные векторы, отвечающие различным собственным значениям, — линейно независимы.

7.1.3. Докажите, что корневые векторы, отвечающие различным собственным значениям, — линейно независимы.

7.1.4. Пусть подпространство U — A-инвариантно. Докажите, что

(а) на подпространстве U корректно задан линейный оператор $A|_U$ (ограничение A на U), причем диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{A|_U} & U \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \xrightarrow{A} & U \end{array}$$

коммутативна;

(б) на факторпространстве V/U существует единственный линейный оператор B, при котором диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{A} & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ V/U & \xrightarrow{B} & V/U \end{array}$$

коммутативна.

Этот оператор мы будем называть *фактороператором*.

(в) если V — прямая сумма A-инвариантных подпространств $V = U \oplus W$, то существует изоморфизм $\alpha : W \to V/U$, при котором диаграмма:

$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{\pi} & V/U & \xleftarrow{\alpha} & W \\ {\scriptstyle A}\downarrow & & \downarrow & & {\scriptstyle A|_W}\downarrow \\ V & \xrightarrow{\pi} & V/U & \xleftarrow{\alpha} & W \end{array}$$

коммутативна.

7.1.5. Докажите, что пространство V распадается в прямую сумму $\ker A$ и $\operatorname{im} A$ (A — линейный оператор на V) тогда и только тогада, когда фактороператор на $V/\ker A$ имеет нулевое ядро.

7.2. Примеры линейных операторов.

7.2.6. Найдите собственные векторы, собственные числа, инвариантные подпространства и матрицу (для конечномерных пространств) следующих операторов:

(а) $\frac{d}{dx}$ в $\mathbb{R}_n[x]$ (многочлены над $\mathbb{R}$, степень которых не превосходит n);

(б) $\frac{d^k}{dx^k}$ в $\mathbb{R}_n[x]$;

(в) $\frac{d}{dx}$ и $\frac{d^k}{dx^k}$ в пространстве квазимногочленов

$$e^{\lambda x}\mathbb{R}_n[x] = \{e^{\lambda x}(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) |\, a_i \in \mathbb{R}\};$$

(г) $\partial = \sum x_i\partial/\partial x_i$ в пространстве $\mathbb{R}[x_1, x_2, \dots, x_n]$.

7.2.7. В пространстве многочленов $\mathbb{R}_n[x]$ в каком-нибудь базисе записать матрицу линейного оператора, переводящего многочлен $f(x)$ в многочлен

$$\int_0^1 (x^2y + xy^2)f(y)dy.$$

Найдите размерность его образа, собственные числа и собственные векторы.

7.2.8. Найдите собственные числа линейного оператора A на $\mathbb{R}_n[x]$, переводящего многочлен $f(x)$ в многочлен $f(ax + b)$ (a и b — фиксированы).

7.2.9. Приведите пример линейного оператора A в трехмерном пространстве, для которого

(а) $V \neq \ker A \oplus \operatorname{im} A$,

(б) $V = \ker A \oplus \operatorname{im} A$, но A не является оператором проектирования.

7.3. Примеры собственных чисел и инвариантных подпространств.

7.3.10. Выясните, при каких условиях оператор, задаваемый в некоторм базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_n \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

имеет базис из собственных векторов.

7.3.11. Докажите, что если λ — собственное число оператора A и $f(t)$ - некоторый многочлен над полем k, то $f(\lambda)$ — собственное число оператора $f(A)$.

7.3.12. Докажите, что если любой вектор $v \in V$ является собственным вектором для оператора A на V, то A — гомотетия, то есть $A = \lambda E$.

7.3.13. Найдите все инвариантные подпространства

(а) диагонального оператора;

(б) оператора, матрица которого в некотором базисе имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}.$$

7.3.14. Пусть операторы A и B в арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ заданы своими матрицами в стандартном базисе:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -6 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 6 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найдите все подпространства, одновременно инвариантные как относительно A, так и относительно B.

7.3.15. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные числа линейного оператора A в n-мерном пространстве V над $\mathbb{C}$. Найдите собственные числа оператора A как оператора в соответствующем $2n$-мерном вещественном пространстве.

7.3.16. Найдите собственные значения поворота вещественной евклидовой плоскости на угол φ и собственные векторы этого преобразования в комплексификации плоскости.

7.3.17. Пусть дан линейный оператор A в n-мерном комплексном пространстве. Докажите, что

(а) A имеет одномерное и $(n-1)$-мерное инвариантное подпространство.

(б) Существует базис, в котором матрица оператора A имеет верхнетреугольный вид.

(в) Если, кроме того, $A^m = \mathrm{id}$ для некоторого натурального m, то $\mathrm{tr}(A^{-1} = \overline{\mathrm{tr} A}$.

7.4. Комплексные собственные векторы вещественных операторов.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, для $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ положим:

$$\mathrm{Re}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Re} z_1 \\ \mathrm{Re} z_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Re} z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad \mathrm{Im}(z) = \begin{pmatrix} \mathrm{Im} z_1 \\ \mathrm{Im} z_2 \\ \vdots \\ \mathrm{Im} z_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n; \qquad \bar{z} = \mathrm{Re}(z) - \mathrm{Im}(z).$$

7.4.18.

(а) Покажите, что комплексное сопряжение $\bar{.} : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ обладает следующими свойствами: $\overline{\lambda z} = \bar{\lambda}\bar{z}$ и $\bar{\bar{z}} = z$.

(б) Опишите подмножества: вещественных векторов — $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ и чисто мнимых $\mathrm{i}\mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, используя комплексное сопряжение.

(в) Выразите $\mathrm{Re}(z)$ и $\mathrm{Im}(z)$ через z и $\bar{z}$.

7.4.19. Докажите, что для всякого конечномерного комплексного пространства V, снабженного *антилинейной инволюцией*

$$\tau : V \to V$$

, где $\tau(v+u) = \tau(v) + \tau(u)$, $\quad \tau(\lambda v) = \bar{\lambda}\tau(v)$S и $\tau^2 = \mathrm{id}_V$, существует изоморфизм $\alpha : V \to \mathbb{C}^n$, для которого коммутативна следующая диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\tau} & V \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle\alpha}\downarrow \\ \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \mathbb{C}^n. \end{array}$$

7.4.20. В условиях предыдущей задачи покажите, что *множество вещественных векторов* $\mathbb{R}(V) = \alpha^{-1}(\mathbb{R}^n)$ является вещественным линенйным подпространством V и не зависит от выбора α. (Указание: опишите $\mathbb{R}(V)$ в терминах τ).

7.4.21. В условиях зад. 4.0.2 опишите разложения $v = \mathrm{Re}(v) + \mathrm{Im}(v)$ вектора из V на вещественную и мнимые части и покажите, что это разложение не зависит от отождествления V с $\mathbb{C}^n$.

7.4.22. Докажите, что V является комплексификацией $\mathbb{R}(V)$.

Этот факт справедлив и для бесконечномерных пространств. Попробуйте дать доказательство, не использующее конечномерность V.

7.4.23. Линейный оператор $A_{\mathbb{C}} : V \to V$ называется *вещественным*, если он коммутирует с антилинейной инволюцией τ. Докажите, что

(а) $A_{\mathbb{C}}$ является комплексификацией вещественного линейного оператора

$$A : \mathbb{R}(V) \to \mathbb{R}(V),$$

(б) если v — собственный вектор $A_{\mathbb{C}}$ с собственным числом λ, то $\tau(v)$ — собственнный вектор $A_{\mathbb{C}}$ с собственным значением $\bar{\lambda}$,

(в) если v — собственный вектор оператора $A_{\mathbb{C}}$, то $\langle \mathrm{Re}(v), \mathrm{Im}(v) \rangle \subset \mathbb{R}(V)$ — A-инвариантное подпространство.

7.4.24. Линейный оператор A в $\mathbb{R}^3$ задан в стандартном базисе матрицей

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Найдите собственные числа, собственные векторы и инвариантные подпространства операторов A и $A_{\mathbb{C}}$.

7.4.25. Найдите собственные векторы, собственные числа и опишите инвариантные подпространства, размерность которых не превосходит двух, для оператора d/dx в $C^\infty(\mathbb{R})$.

7.4.26. Найдите матрицу с целыми коффициентами, квадрат которой равен

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7.5. Алгебра линейных операторов.

Оператор называется *диагонализируемым*, если существует базис, в котором матрица этого оператора имеет диагональный вид.

7.5.27. Найдите собственные значения линейных операторов, удовлетворяющих уравнениям:

(а) $P^2 = P$ проектор),

(б) $I^2 = E$ (инволюция),

(в) $P^2 = \alpha P$.

Будут ли эти операторы диагонализируемы?

7.5.28. Докажите, что линейный оператор A, удовлетворяющий уравнению $(A - \alpha E)(A - \beta E) = 0$, диагонализируем при $\alpha \neq \beta$.

7.5.29. Докажите, что оператор A, удовлетворяющий уравнению $A^3 - 6A^2 + 11A - 6E = 0$, диагонализируем.

7.5.30. Докажите равносильность следующих условий на оператор B:

(а) B — нильпотентен (то есть $B^k = 0$ для некоторого k),

(б) все собственные числа оператора B равны нулю,

(в) если $\ker B \neq 0$, то $\ker B^i$ — собственное подпространство $\ker B^{i+1}$,

(г) если $\operatorname{im} B \neq V$, то $\operatorname{im} B^{i+1}$ — собственное подпространство $\operatorname{im} B^i$,

(д) в пространстве V можно выбрать такой базис

$$e_(1)_1, e_(1)_2, \ldots, e_(1)_{k_1}\ ,\ e_(2)_1, e_(2)_2, \ldots, e_(2)_{k_2}\ , \ldots ,\ e_(s)_1, e_(s)_2, \ldots, e_(s)_{k_s}\ ,$$

что для всех $i = 1, ...s$ и $j \neq k_i$ $\qquad Be^{(i)}_j = e^{(i)}_{j+1}$, а $Be^{(i)}_{k_i} = 0$.

7.6. Билинейные функции как операторы $V \longrightarrow V^*$.

Через $g(.,.)$ будет обозначаться билинейная функция на V; через g_v — элемент из V^*, заданный формулой: $g_v(w) = g(v, w)$; через $\tilde{g}$ — соответствующее линейное отображение (корреляция), при котором $v \mapsto g_v$.

7.6.31. Докажите, что

(а) соответствие $g \mapsto \tilde{g}$ — (естественный) линейный изоморфизм между пространствами билинейных функций на V и линейных отображений $V \longrightarrow V^*$,

(б) матрица Грама билинейной функции g в базисе $e_1, e_2, \ldots, e_n$ пространства V транспонирована к матрице $\tilde{g}$ в паре базисов $e_1, e_2, \ldots, e_n$; $e^1, e^2, \ldots, e^n$, где последний — базис в V^*, дуальный к базису $e_1, e_2, \ldots, e_n$.

7.6.32. Пусть V — линейное пространство над $\mathbb{C}$, $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ — *эрмитова* функция (линейная по первому аргументу и эрмитово симметричная: $g(v, w) = \overline{g(w, v)}$). Докажите, что

(а) $g_v \in \overline{V^*}$ — пространству аддитивных отображений $f : V \longrightarrow \mathbb{C}$, являющихся антилинейными: $f(\lambda v) = \bar{\lambda} f(v)$;

(б) $\tilde{g} : v \mapsto g_v$ — $\mathbb{C}$-линейное отображение $V \longrightarrow \overline{V^*}$;

7.6.33. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную зад. 6.0.1 для эрмитовой функции из предыдущей задачи.

Определение. *Сопряженным отображением* к линейному отображению $A : V \longrightarrow W$ называется отображение $A^* : W^* \longrightarrow V^*$, переводящее $f \in W^*$ в $f \circ A \in V^*$.

7.6.34.

(а) Докажите, что билинейная функция g симметрична (кососимметрична) тогда и только тогда, $\tilde{g}^* = \tilde{g}$ (соответственно $\tilde{g}^* = -\tilde{g}$).

(б) Дайте определение $\bar{A}^*$ над $\mathbb{C}$ и покажите, что g эрмитова тогда и только тогда, когда $\tilde{g} = \overline{\tilde{g}^*}$.

7.6.35. Покажите, что над полем характеристики $\neq 2$ любая билинейная функция однозначно раскладывается в сумму симметричной и кососимметричной билинейных функций. Переформулируйте этот факт для корреляций.

7.6.36. Докажите, что над $\mathbb{C}$ $g(v, w)$ эрмитово симметрична тогда и только тогда, когда $h(v, w) = g(iv, w)$ эрмитово симметрична.

7.6.37. Пусть $\dim V = n$ и билинейная функция g невырождена. Докажите, что система векторов $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \subset V$ линейно независима тогда и только тогда, когда матрица $\|g(e_i, e_j)\|$ невырождена.

7.6.38.

(а) Докажите, что над полем K характеристики $\neq 2$ любая симметричная билинейная функция $g : V \times V \longrightarrow K$ однозначно восстанавливается по своему ограничению на диагональ $\Delta = \{(v, v)\} \subset V \times V$;

(б) Докажите, что если $g|_\Delta \equiv 0$, то g кососимметрична.

7.6.39. Докажите, что вещественная и мнимая части эрмитовой функции являются, соответственно, симметричной и кососимметричной вещественными билинейными функциями.

7.6.40. Приведите пример невырожденной билинейной функции g на пространстве V и подпространства L так, чтобы ограничение $g|_L$ было вырожденной билинейной функцией.

7.6.41. Докажите, что если $g|_L$ — невырождено, то
$V = L \oplus L^\perp$, где

$$L^\perp = \{w \in V | g(l, w) = 0 \quad \forall l \in L\}.$$

7.6.42. Пусть g — симметричная билинейная функция на конечномерном пространстве V над полем K. Докажите, что в V существует базис, в котором матрица Грама функции g имеет вид:

(а) $\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & -E_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, где E_r — единичная матрица размера $r \times r$,если $K = \mathbb{R}$;

(б) $\begin{pmatrix} Er & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $K = \mathbb{C}$;

(в) $\begin{pmatrix} E_{r_+} & 0 & 0 \\ 0 & aE_{r_-} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, если $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, p \neq 2$, причем $a \neq 0$ — не является квадратом в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Определим число $r_0 = \dim V - (r_+ + r_-)$ Набор чисел (r_0, r_+, r_-) в первом случае называется *сигнатурой* функции g.

Билинейные функции g и g', заданные соответственно на V и V', называются *изометричными* или *эквивалентными*, если существует оператор изометрии $\varphi : V \longrightarrow V'$ — линенйный изоморфизм, при котором $g(v, w) = g'(\varphi(v), \varphi(w))$.

7.6.43.

(а) Докажите, что две симметричные билинейные функции над $\mathbb{R}$ изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую сигнатуру ("закон инерции").

(б) Докажите, что две симметричные билинейные функции g и g' над $\mathbb{C}$ изометричны тогда и только тогда, когда равны их ранги и $\dim V = \dim V'$.

(в) Докажите, что две симметричные билинейные функции над $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ изометричны тогда и только тогда, когда их наборы чисел (r_0, r_+, r_-) совпадают.

7.6.44.

(а) Покажите, что для эрмитовой функции на конечномерном комплексном пространстве существует базис, в котором матрица Грама g совпадает с матрицей из зад. 6.0.12(а).

(б) Докажите, что две эрмитовы функции изометричны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковую сигнатуру (r_0, r_+, r_-).

7.6.45. Докажите, что кососимметричная билинейная функция g на пространстве V над полем характеристики $\neq 2$ в некотором базисе имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ -E_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ и числа r и $\dim V$ определяют g с точностью до изометрии.

7.6.46. Найдите сигнатуру билинейных функций, заданных в стандартном базисе пространства $\mathbb{R}^n$ матрицами:

(а) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(б) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$,

(в) $\begin{pmatrix} I & 0 & \dots & 0 \\ 0 & I & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & I \end{pmatrix}$, где I 2×2-матрица $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.