Отчет о научной и педагогической деятельности в 2017 году
Иванова-Погодаева Ильи Анатольевича

Научная деятельность в 2017 году

Одним из основных направлений работы в этом году было исследование связей апериодических замощений с алгебраическими структурами, прежде всего с полугруппами и группами. В этой связи важным инструментом является результат Мозеса-Гудмана-Штраусса из теории плиточных замощений.

Теорема Мозеса-Гудмана-Штраусса заключается в следующем: допустим, есть подстановочная система из конечного числа геометрических многоугольников-плиток, с заданным правилом разбиения каждой плитки на гомотетичные плитки меньшего размера. Тогда по такой подстановочной системе можно осуществить декорирование: разбить плитки каждого типа на конечное число подтипов и раскрасить стороны плиток каждого подтипа в конечное число цветов. После этого можно рассмотреть все замощения плоскости плитками полученных типов, с условием, что прикладывать друг к другу плитки можно только одинаковыми сторонами. Теорема утверждает, что декорирование можно осуществить таким образом, что замощениями, удовлетворяющими таким краевым условиям будут только замощения, генерируемые изначальной подстановочной системой.

Мозес доказал этот факт в 1988 году для плиток прямоугольного типа (комбинаторных подстановок). Гудман-Штраусс доказал это для геометрических подстановок в 1998 году. Оба доказательства являются технически сложными, в настоящее время не известно относительно простого способа доказать это утверждения.

Идеологически утверждение означает возможность задания глобальной иерархической системы локальными средствами. Такие идеи также работают и в алгебре, что делает возможным применение этой теоремы, например, в теории групп.

Исследования при построении конечно определенной нильполугруппы показали, что апериодические замощения могут быть полезны при построении алгебраических объектов. По плиточным замощениям можно строить полугруппы и группы, при этом некоторые свойства замощений влекут полезные свойства в полугруппах и группах.

В частности, очень важным является свойство детерминированности. Для замощения квадратными плитками он означает однозначное восстановление плитки внутри квадрата 2×2 по трем остальным плиткам. Язык плиточных замощений может быть переведен в язык теории групп. В этом случае наличие детерминированности влечет наличие свойства $C(4) - T(4)$ в соответствующей группе.

Таким образом, идеи, использованные при построении конечно определенной нильполугруппы также полезны и в теории групп.

В целом, эти исследования продолжают работу, начатую в прошлом году.

1. В работе "Гиперболические группы"(sec. 4.7A) Михаил Громов обсуждает вопрос, обязательно ли негиперболическая группа с неположительной кривизной должна содержать подгруппу, изоморфную Z^2. Громов выражает уверенность, что можно построить компактное полугиперболическое (неположительной кривизны) пространство, в которое можно отобразить R^2, но, фундаментальная группа которого не содержит Z^2.

Работа с Анной Эршлер в апреле-мае и сентябре-октябре во время визитов в Ecole Normale Superieure, позволила наметить план построения такой группы. В частности, группа строится по набору плиток, обладающему рядом свойств: детерминированность влечет $C(4) - T(4)$ свойство, возможность замощения влечет негиперболичность, непериодичность влечет отсутствие подгруппы, изоморфной Z^2. Текст в данный момент готовится.

2. Была завершена начатая в 2016 работа: была построена конечно определенная полугруппа, содержащая бесконечный бесквадратный идеал. В 2017 году были внесены коррективы в текст, улучшающие изложение. Соответствующая статья (совместно с Сергеем Малевым и Ольгой Сапир) "A construction of a finitely presented semigroup containing an infinite square-free ideal with zero multiplication"была отрецензировала и принята в печать в International Journal of Algebra and Computation.

Конечной целью этого направления работ является построение конечно определенного нилькольца. Полезными являются промежуточные построения, включающие, например, конечно определенное кольцо, содержащее бесконечный бесквадратный идеал. Работа, упомянутая выше, является частью этого плана.

3. Также была завершена начатая в 2016 году другая совместная работа с Сергеем Малевым: "Finite Groebner Basis Algebras with unsolvable nilpotency problem and zero divisors problem"(Journal of Algebra).

4. Я продолжаю работу по упрощению изложения конструкции бесконечной конечно определенной нильполугруппы. Более простая конструкция позволит уменьшить экспоненту. В частности, целью тут является конструкция конечно определенной полугруппы, квадрат каждого элемента которой равен нулю.

Кроме того, планируется заменить переборное доказательство свойства детерминированности, которое занимает около 100 страниц. Это позволит со временем подготовить более короткую статью с изложением этого результата.

5. Совместно с Алексеем Малистовым написана статья для журнала Квант: "Задача о разбойниках посвященная алгоритму дележа с завистью, по мотивам проекта на Летней Конференции Турнира Городов.

Опубликованные и поданные в печать статьи

1. I. Ivanov-Pogodaev, S. Malev, O. Sapir *A construction of a finitely presented semigroup containting an infinite square-free ideal with zero multiplication.* International Journal of Algebra and Computation, отправлена в печать.

2. I. Ivanov-Pogodaev, S. Malev *Finite Groebner basis algebra with unsolvable nilpotency problem and zero divisors problem.* Journal of Algebra, отправлена в печать.

3. И.Иванов-Погодаев, А.Канель-Белов. *Конструкция бесконечной конечно определенной нильполугруппы.* Известия Российской Академии Наук, находится на рецензии.

4. И.Иванов-Погодаев, А.Малистов *Задача о разбойниках.* Квант, отправлена в редакцию.

Конференции

В этом году не участвовал в конференциях, но было две поездки в Ecole Normale Superieure: апрель-май 2017 и сентябрь-октябрь 2017.

Педагогическая деятельность

в 2017 два моих ученика стали призерами Заключительного этапа Всероссийской олимпиады по математике, еще несколько стали призерами регионального этапа.

В сентябре 2017 (как и годом ранее) мной была организована, проведена и проверена Открытая олимпиада по математике для 5-8 классов в г. Жуковском. Принцип проведения был схож с Турниром Городов: зачет проводился по трем задачам, в которых получено наибольшее продвижение. Участвовало около 550 школьников города. Основной целью проведения были популяризация математики и выявление способных ребят для занятий в кружках.