

ОТЧЕТ О НАУЧНОЙ И ПЕДАГОГИЧЕСКОЙ РАБОТЕ ЗА 2017 ГОД СТИПЕНДИАТА КОНКУРСА «МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ»

ПЕНСКОЙ А. В.

ВВЕДЕНИЕ

Главной темой моих исследований 2017 года, как и последние несколько лет, являлось описание метрик на замкнутых поверхностях, экстремальных для собственных значений оператора Лапласа-Бельтрами. Так как в ходе учебного года у меня колоссальная преподавательская нагрузка, основные научные исследования проводились в 2017 году в ходе моей трёхмесячной работы летом 2017 года в Institut de Mathématique de Marseille (UMR 7373) совместно с Н. С. Надирашвили. Подробное описание полученного результата вместе с введением в данную проблематику следует ниже, краткое же резюме такое:

- Было доказано изопериметрическое неравенство *для всех* собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере: для любого натурального k собственное число λ_k оператора Лапласа-Бельтрами на двумерной сфере с римановой метрикой площади 1 максимизируется в пределе последовательности метрик, сходящейся к особой метрике на объединении k идентичных касающихся сфер со стандартной метрикой.

Это доказывает гипотезу, высказанную Надирашвили в 2002 году, и дает строгое изопериметрическое неравенство для всех ненулевых собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами на сфере. Ранее этот результат был известен только для $k = 1$ (J. Hersch [4], 1970), $k = 2$ (N. Nadirashvili [10], 2002 and R. Petrides [13], 2014) and $k = 3$ (N. Nadirashvili and Y. Sire [12], 2015). В частности, это значит, что для $k \geq 2$ супремум k -го собственного числа на сфере единичного объема не можем быть достигнут на римановой метрике, гладкой за исключением конечного числа конических особенностей. Доказательство использует свойства гармонических отображений между сферами. (Результат, полученный совместно с М. А. Карпухиным, Н. С. Надирашвили и И. В. Полтеровичем).

Отметим, что *впервые задача геометрической оптимизации собственных чисел на поверхности была решена для всех собственных чисел: до этого эта задача решалась лишь для некоторых собственных чисел.*

В 2017 году продолжалась педагогическая деятельность, как чтение лекций и ведение семинаров, так и научное руководство учениками, в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Национальном исследовательском университете - Высшей школе экономики и в Независимом московском университете.

1. НАУЧНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В 2017 ГОДУ

1.1. **История задачи.** Проблема геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа восходит к лорду Рэлею.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ограниченная область в евклидовом пространстве. Рассмотрим спектральную задачу для оператора Лапласа Δ в области Ω с граничным условием Дирихле

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta u = \lambda u, \\ u|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases}$$

Известно, см., например, [3], что спектр является положительным, дискретным, с конечной кратностью и стремящимся к бесконечности. Будем обозначать спектр задачи (1) через $0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \lambda_4(\Omega) \leq \dots$, причем каждое собственное число в этой последовательности встречается столько раз, какова его кратность. Величины $\lambda_i(\Omega)$ называются собственными числами Дирихле области Ω и образуют спектр Дирихле области Ω .

В изданной в 1877-1878 годах знаменитой книге [16] лорд Рэлей поставил следующую задачу: найти область $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ заданной площади, для которой первое собственное число $\lambda_1(\Omega)$ минимально. Без условия фиксированной площади задача тривиальна: при гомотетии плоской области Ω с коэффициентом растяжения μ спектр Ω будет делиться на μ^2 , а потому $\lambda_1(\Omega)$ может быть легко сделано сколь угодно малым. Задача Рэрея явилась первой в истории задачей о геометрической оптимизации собственных значений оператора Лапласа. Рэлей дал правильный ответ: минимум первого собственного числа Дирихле достигается на диске, но доказательство использовало физические соображения и не являлось строгим. Физически ответ может быть проинтерпретирован следующим образом: среди всех барабанов с заданной площадью мембраны самый низкий звук издает барабан с круглой мембраной. Строгое доказательство результата Рэрея и его обобщение на случай \mathbb{R}^n было дано в двадцатых прошлого века независимо Фабером [2] и Краном [6].

Теорема 1.1 (Фабер, Кран). *Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ шар в \mathbb{R}^n объема c . Тогда $\lambda_1(\mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_1(\Omega) | \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{Vol}(\Omega) = c\}$.*

Наиболее естественным обобщением задачи Рэрея является вопрос о минимизации второго собственного числа Дирихле $\lambda_2(\Omega)$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с фиксированным объемом. Ответ на данный вопрос был дан в не очень явной форме в работе Крана [7] 1926 года, и поэтому иногда приписывается П. Сегё, см. работу Пойа [15].

Теорема 1.2 (Кран, П. Сегё). *Пусть $c > 0$ и $\mathbb{B}^n \subset \mathbb{R}^n$ шар в \mathbb{R}^n объема $c/2$. Тогда минимум достигается на объединении двух шаров, $\lambda_2(\mathbb{B}^n \sqcup \mathbb{B}^n) = \min\{\lambda_2(\Omega) | \Omega \subset \mathbb{R}^n, \text{Vol}(\Omega) = c\}$.*

Проблема минимизации следующих собственных чисел Дирихле области является открытой и известны лишь частичные результаты, которые описаны в книге [3, глава 5]. В частности, существует гипотеза о том, что для третьего собственного числа Дирихле минимум в размерности 2 и 3 достигается на шаре, а в размерности $n \geq 4$ на объединении трех шаров равного радиуса. Компьютерное моделирование показывает, что в плоском случае для $\lambda_4(\Omega)$ минимум достигается на объединении двух дисков неравного радиуса, для λ_k , $k \geq 5$, полученные компьютерными методами экстремальные области довольно причудливы, см. [3, рис. 5.1], и не сформулированы даже гипотезы, описывающие ответ. Вместо спектральной задачи с граничным условием Дирихле (1) можно рассматривать спектральную задачу для ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с граничным условием Неймана. В этом случае также имеются некоторые результаты.

У описанной задачи геометрической оптимизации собственных чисел оператора Лапласа евклидовых областей есть естественные обобщения на случай римановых многообразий. Можно рассматривать задачи Дирихле и Неймана на многообразиях с краем, но совершенно новым является случай многообразий без края.

1.2. Постановка основной задачи. Пусть M замкнутая поверхность, и g риманова метрика на M . Спектр оператора Лапласа-Бельтрами на замкнутой поверхности неотрицателен, дискретен, имеет конечные кратности и возрастает к бесконечности. Так как оператор Лапласа-Бельтрами Δ зависит от метрики g , то и собственные числа (обратим внимание на использование нумерации собственных чисел!)

$$(2) \quad 0 = \lambda_0(M, g) < \lambda_1(M, g) \leq \lambda_2(M, g) \leq \lambda_3(M, g) \leq \dots$$

зависят от метрики g . Хорошо известно, что собственные числа оператора Лапласа-Бельтрами Δ обладают следующим свойством масштабирования, $\forall t > 0 \quad \lambda_i(M, tg) = \frac{\lambda_i(M, g)}{t}$. Поэтому вместо $\lambda_i(M, g)$ лучше рассматривать функционалы

$$(3) \quad \Lambda_i(M, g) = \lambda_i(M, g) \text{Area}(M, g),$$

где $\text{Area}(M, g)$ обозначает площадь, которые инвариантны при преобразованиях $g \mapsto tg$.

Итак, рассмотрим задачу нахождения при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ функционала $\Lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M . Эта задача эквивалентна задаче нахождения супремума $\sup \lambda_i(M, g)$ на пространстве всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M , таких, что площадь M равна 1.

Оказывается, что вопрос о нахождении при фиксированном i супремума $\sup \Lambda_i(M, g)$ является очень трудным, и к настоящему времени получено сравнительно мало результатов.

Из результатов Янга и Яу [17] и Кореваара [5] следует, что при всех i значения $\sup \Lambda_i(M, g)$ конечны, так как функционалы $\Lambda_i(M, g)$ ограничены. Необходимо заметить, что Кольбуа и Додзюк доказали [1], что для многообразия M размерности $\dim M \geq 3$ функционал $\lambda_i(M, g)$ не ограничен на пространстве римановых метрик g на M объема 1. Именно поэтому мы рассматриваем геометрическую оптимизацию собственных чисел оператора Лапласа-Бельтрами только на поверхностях.

Определение 1.3. Метрика g_0 на фиксированной поверхности M называется максимальной для функционала $\Lambda_i(M, g)$, если $\sup \Lambda_i(M, g) = \Lambda_i(M, g_0)$, где супремум берется по пространству всех римановых метрик g на фиксированной поверхности M .

К настоящему времени мы знаем удивительно мало максимальных метрик.

Теорема 1.4 (Херш [4]). Стандартная метрика на сфере является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{S}^2, g)$.

Теорема 1.5 (Ли, Яу [8]). Стандартная метрика на проективной плоскости является единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{R}P^2, g)$.

Теорема 1.6 (Надирашвили [9]). Единственной максимальной метрикой для $\Lambda_1(\mathbb{T}^2, g)$ является метрика на равностороннем торе, то есть на торе, который является фактором евклидовой плоскости по решетке из параллелограммов, составленных из двух равносторонних треугольников.

Недавние результаты указали на значительную роль метрик с особенностями.

Теорема 1.7 (Надирашвили [10], Петридес [13]). *Имеет место равенство $\sup \Lambda_2(\mathbb{S}^2, g) = 16\pi$, и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_2(\mathbb{S}^2, g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении двух сфер равного радиуса со стандартной метрикой, касающихся друг друга в одной точке.*

Теорема 1.8 (Петридес [14]). *Пусть Σ_γ обозначает ориентируемую замкнутую поверхность рода γ . Если $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g) > \sup \Lambda_1(\Sigma_{\gamma-1}, g)$, то $\sup \Lambda_1(\Sigma_\gamma, g)$ достигается на метрике, которая является гладкой, за исключением конечного числа конических особенностей.*

Теорема 1.9 (Надирашвили, Сир [12]). *Верно равенство $\sup \Lambda_3(\mathbb{S}^2, g) = 24\pi$, и этот супремум достигается как предел значений $\Lambda_3(\mathbb{S}^2, g)$ на последовательности гладких метрик, сходящейся к сингулярной метрике, получающейся на объединении трёх касающихся сфер равного радиуса со стандартной метрикой.*

Теорема 1.10 (Надирашвили, Пенской [11]). *Верно равенство*

$$\sup \Lambda_2(\mathbb{RP}^2, g) = 20\pi,$$

причём это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 на проективной плоскости, сходящейся к сингулярной метрике на проективной плоскости и сфере со стандартными метриками, касающимися в одной точке, такими, что площади проективной плоскости и сферы относятся как 3 : 2.

1.3. Результаты, полученные в 2017 году. Полученные результаты касаются сферы \mathbb{S}^2 . Впервые задача геометрической оптимизации собственных чисел на поверхности была решена для всех собственных чисел: до этого эта задача решалась лишь для некоторых собственных чисел.

Теорема 1.11 (Карпукхин, Надирашвили, Пенской, Полтерович). *Верно равенство*

$$\sup \Lambda_k(\mathbb{S}^2, g) = 8\pi k,$$

причём это значение может быть достигнуто как предел на последовательности метрик площади 1 на сфере, сходящейся к сингулярной метрике на k идентичных сферах со стандартными метриками одинаковой площади, касающимися в точках.

2. ПУБЛИКАЦИИ ЗА 2017 ГОД

- [1] M. Karpukhin, N. Nadirashvili, A. V. Penskoï and I. Polterovich, An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on the sphere. Preprint [arXiv:1706.05713](https://arxiv.org/abs/1706.05713), submitted to *Journal of Differential Geometry*

3. ДОКЛАДЫ, СДЕЛАННЫЕ В 2017 ГОДУ

- [1] Конференция «Рождественские встречи», Независимый университет, 4-6 января 2017 года. Доклад “Isoperimetric inequality for the second non-zero eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on the projective plane”.
- [2] Конференция «Geometric spectral theory», Universite de Neuchâtel, June 19-23, 2017. Доклад “An isoperimetric inequality for Laplace eigenvalues on S^2 and RP^2 ”.

- [3] Доклад «Максимизация второго собственного числа на проективной плоскости», на семинаре «Геометрия, топология и математическая физика» (руководители С. П. Новиков, В. М. Бухштабер), МГУ & МИ РАН им. В. А. Стеклова.

4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

Проводившиеся в 2017 году научные исследования проводились в тесном сотрудничестве с Н. С. Надирашвили из Institut de Mathématique de Marseille (UMR 7373), особенно во время трёхмесячного визита в Марсель, который стало возможным благодаря тому, что я являюсь исследователем российско-французского Междисциплинарного научного центра Понселе (Interdisciplinary Scientific Center J.-V. Poncelet, ISCP, UMI 2615). Также я тесно сотрудничаю с монреальскими математиками И. В. Полтеровичем (Université de Montréal) и М. А. Карпухиным (McGill University).

5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ (ВКЛЮЧАЯ НАУЧНОЕ РУКОВОДСТВО)

5.1. Преподавание. В 2017 году я преподавал в Московском государственном университете им. М. В. Ломоносова, в Национальном исследовательском университете - Высшей школе экономики и в Независимом московском университете.

- Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
 - Классическая дифференциальная геометрия (для студентов 2 курса), февраль-май 2017 года, 2 часа семинаров в неделю.
 - Риманова геометрия (для студентов 3-6 курса), февраль-май 2017 года, 2 часа лекций в неделю.
 - Дифференциальная геометрия (для студентов 3 курса), сентябрь-декабрь 2017 года, 2 часа лекций и 6 часов семинаров в неделю.
- Национальный исследовательский университет - Высшая школа экономики
 - Дифференциальная геометрия (для студентов 2-4 курса), январь-май 2017, 2 часа лекций и 2 часа семинаров в неделю.
 - Топология-I (для студентов 1 курса), январь-март 2017, 2 часа семинаров в неделю.
 - Анализ-I (для студентов 1 курса), сентябрь-декабрь 2017, 4 часа семинаров в неделю.
 - Анализ на многообразиях, (для студентов 2 курса), сентябрь-декабрь 2017, 2 часа семинаров в неделю.
 - Топология-I (для студентов 1 курса), декабрь 2017, 3 часа семинаров в неделю.
- Независимый московский университет
 - Гармонические отображения (для студентов 3-6 курса), февраль-май 2017, 2 часа лекций в неделю.
 - Комплексно-аналитические многообразия и векторные расслоения (для студентов 3-6 курса), сентябрь-декабрь 2017, 2 часа лекций в неделю.
 - Calculus on Manifolds, программа "Math in Moscow" НМУ, февраль-май 2017 года, 4 часа в неделю (2 часа лекций + 2 часа семинаров).
 - Calculus on Manifolds, программа "Math in Moscow" НМУ, сентябрь-декабрь 2017 года, 4 часа в неделю (2 часа лекций + 2 часа семинаров).

5.2. Научные семинары. В 2017 году успешно продолжал работу основанный мной семинар "Спектральная геометрия". Это совместный учебно-исследовательский семинар Независимого московского университета и российско-французского Междисциплинарного научного центра Понселе (Interdisciplinary Scientific Center J.-V. Poncelet, ISCP, UMI 2615).

Также я являюсь регулярным участником семинара по геометрии, топологии и математической физике кафедры Высшей геометрии и топологии мехмата МГУ (семинар С. П. Новикова и В. М. Бухштабера).

5.3. Научное руководство. В 2017 году я руководил следующими студентами и аспирантами.

- Александр Бердников, аспирант НМУ (также МГУ, научный руководитель Emmy Murphy).
- Равиль Габдурахманов, аспирант НИУ ВШЭ и НМУ.
- Владимир Медведев, аспирант НМУ (также Université de Montréal, научный руководитель Иосиф Полтерович).
- Арсений Райко, студент МГУ.
- Иван Салтыков, студент МГУ.
- Александр Молокоедов, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.
- Евгений Лурье, студент бакалавриата НИУ ВШЭ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] B. Colbois, J. Dodziuk, "Riemannian metrics with large λ_1 ", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **122**:3 (1994), 905–906.
- [2] G. Faber, "Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt", *Sitz. Ber. Bayer. Akad. Wiss.*, (1923), 169-172.
- [3] A. Henrot, *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*, Basel: Birkhäuser, 2006.
- [4] J. Hersch, "Quatre propriétés isopérimétriques de membranes sphériques homogènes", *C. R. Acad. Sci. Paris Sér A-B*, **270** (1970), A1645–A1648.
- [5] N. Korevaar, "Upper bounds for eigenvalues of conformal metrics", *J. Differential Geom.*, **37**:1 (1993), 73–93.
- [6] E. Krahn, "Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises", *Math. Ann.* **94**:1 (1925), 97–100.
- [7] E. Krahn, "Über Minimaleigenschaften der Kugel in drei und mehr Dimensionen", *Acta Comm. Univ. Dorpat.*, **A9** (1926), 1-44.
- [8] P. Li, S.-T. Yau, "A new conformal invariant and its applications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces", *Invent. Math.*, **69**:2 (1982), 269–291.
- [9] N. Nadirashvili, "Berger's isometric problem and minimal immersions of surfaces", *Geom. Funct. Anal.*, **6**:5 (1996), 877–897.
- [10] N. Nadirashvili, "Isoperimetric inequality for the second eigenvalue of a sphere", *J. Differential Geom.*, **61**:2 (2002), 335–340.
- [11] N. Nadirashvili, A. V. Penskoï, Isoperimetric inequality for the second non-zero eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on the projective plane. Preprint [arXiv:1608.07334](https://arxiv.org/abs/1608.07334).
- [12] N. Nadirashvili, Y. Sire, Isoperimetric inequality for the third eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator on \mathbb{S}^2 , Preprint [arXiv:1506.07017](https://arxiv.org/abs/1506.07017).
- [13] R. Petrides, "Maximization of the second conformal eigenvalue of spheres", Preprint [arXiv:1206.0229](https://arxiv.org/abs/1206.0229).
- [14] R. Petrides, "Existence and regularity of maximal metrics for the first laplace eigenvalue on surfaces", Preprint [arXiv:1310.4697](https://arxiv.org/abs/1310.4697).
- [15] G. Pólya, "On the characteristic frequencies of a symmetric membrane", *Math. Z.*, **63** (1955), 331–337.
- [16] J. W. Strutt, baron Rayleigh, *The Theory of Sound*, Vol. I, II, London, London : Macmillan, 1877, 1878.
- [17] P. C. Yang, S.-T. Yau, "Eigenvalues of the laplacian of compact Riemann surfaces and minimal submanifolds", *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.*, **7**:1 (1980), 55–63.