Отчет за 2016 год
по гранту конкурса «Молодая математика России»

Никита Н. Сеник

1 Полученные результаты

В этом году мы занимались изучением различных аспектов усреднения эллиптических дифференциальных операторов второго порядка, коэффициенты которых являются или периодическими лишь вдоль некоторых направлений, или локально периодическими. Из классической теории хорошо известно, что решения задач с быстро осциллирующими коэффициентами сходятся слабо (а в некоторых случаях и сильно) к решениям задач, коэффициенты которых уже не осциллируют. Наша цель заключалась, во-первых, в получении различных приближений *по операторным нормам* для резольвенты соответствующего задаче оператора и, во-вторых, в доказательстве *точных по порядку* оценок погрешностей.

В статье [3] рассматривался скалярный несамосопряженный эллиптический оператор на бесконечном цилиндре $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{T}^{d_2}$, который имел вид

$$\mathscr{A}^\varepsilon = -\operatorname{div} A(x_1/\varepsilon, x_2)\nabla + \operatorname{div} a_1(x_1/\varepsilon, x_2) + a_2^*(x_1/\varepsilon, x_2)\nabla + q(x_1/\varepsilon, x_2).$$

Коэффициенты оператора предполагались периодическими по первому аргументу (иначе говоря, вдоль цилиндра), так что при уменьшении параметра ε они начинали быстро осциллировать. Никакой гладкости по «периодической» переменной не требовалось; необходимо лишь, чтобы вещественная часть функции A удовлетворяла стандартным условиям равномерной эллиптичности, а коэффициенты в младших членах принадлежали определенным пространствам так называемых мультипликаторов между классами Соболева. При подходящих $\mu \in \mathbb{C}$ мы получили приближения для операторов $(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ и $\nabla(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ по операторной норме на L_2. Первое из них осуществлялось с помощью резольвенты оператора, коэффициенты которого зависят лишь от «непериодических» переменных и тем самым не осциллируют. Для другого приближения требуется привлечь еще так называемый корректор — оператор нулевого порядка по ε, но содержащий быстро осциллирующие множители; этот корректор хорошо известен в теории усреднения. Кроме того, в приближении для $(\mathscr{A}^\varepsilon - \mu)^{-1}$ мы нашли и следующее, второе, слагаемое; его также называют корректором, однако аналогов в классической теории у него нет (впервые получен в работе М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [2]). Отметим, что такой корректор позволяет в конечном счете найти наилучшую аппроксимацию решения задачи с быстро осциллирующими коэффициентами при условии, что правая часть в соответствующем уравнении не имеет дополнительной гладкости.

В работе [4] мы перенесли данные результаты на случай матричных операторов, при этом от старшей части требовались лишь ограниченность и коэрцитивность (равномерные по ε), никаких условий на ее структуру (о специальной факторизации, например, — см. [1]) наложено не было.

Локально периодические операторы, коэффициенты которых зависят как от «быстрой» переменной, так и от «медленной», являются естественным обобщением периодических, и нашим следующим шагом было доказательство аналогичных результатов для локально периодического матричного оператора

$$\mathscr{A}^{\varepsilon} = -\operatorname{div} A(x, x/\varepsilon)\nabla,$$

в котором функция A является гладкой (в некотором смысле) по первой переменной и периодической — по второй. Выяснилось, в частности, что «неклассический» корректор для локально периодического оператора отличается от своего аналога для изученной ранее периодической задачи на цилиндре. В настоящее время готовится подробное изложение [5].

Также мы приступили к изучению операторов на цилиндре, сечением которого является не тор, а некоторая область, и на границе ставятся условия Дирихле или Неймана. Уже получены предварительные результаты.

Цитированная литература

[1] *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения // *Алгебра и анализ.* — 2003. — Т. 15, № 5. — С. 1–108.

[2] *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора // *Алгебра и анализ.* — 2005. — Т. 17, № 6. — С. 1–104.

[3] *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // *SIAM J. Math. Anal.*, to appear.

[4] *Сеник Н. Н.* Усреднение несамосопряженных периодических эллиптических операторов в бесконечном цилиндре // *Выпускная квалификационная работа.* — СПб: СПбГУ, 2016.

[5] *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators, in preparation.

2 Опубликованные, поданные в печать и готовящиеся работы

- *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных периодических эллиптических операторов в бесконечном цилиндре // *Функц. анализ и его прил.* — 2016. — Т. 50, № 1. — С. 85–89.
- *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder // *SIAM J. Math. Anal.*, to appear.
- *Сеник Н. Н.* Усреднение несамосопряженных периодических эллиптических операторов в бесконечном цилиндре // *Выпускная квалификационная работа.* — СПб: СПбГУ, 2016.
- *Senik N. N.* Homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators, in preparation.

3 Участие в конференциях и школах

- 45-минутный доклад на конференции *Trilateral German–Russian–Ukrainian Summer School: Spectral Theory, Differential Equations and Probability*, 4th–15th September 2016, Johannes Gutenberg Universität Mainz, Mainz, Germany.

4 Работа в научных центрах и международных группах

- Инженер-исследователь на кафедре теории упругости математико-механического факультета СПбГУ.