Отчет по гранту Молодая математика России
Журавлевой Виктории Владимировны

1 Проведенные исследования

Проведенные исследования касаются вопросов распределения степеней чисел Пизо и некоторых рекуррентных последовательностей, связанных с числами Пизо.

Последовательность действительных чисел $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$, называется линейной рекуррентной, если для некоторых $a_1, \dots a_d \in \mathbb{Z}$ выполнено

$$x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k} + \dots + a_{d-1} x_{n-d+1} + a_d x_{n-d}. \tag{1}$$

Одной из задач, связанных с использованием рекуррентных последовательностей, является задача о распределении дробных частей $K_n = \{\xi\alpha^n\}$, где $\alpha, \xi \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, $\xi \neq 0$.

В 2006 году Дубицкас оценил разность между верхним и нижним пределами K_n за исключением случая, когда α является числом Пизо и $\xi \in \mathbb{Q}(\alpha)$. Хорошие оценки в оставшемся случае получены Дубицкасом и автором только для некоторых чисел Пизо.

Напомним, что последовательность $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ называется *периодической по модулю 1*, если существует такое целое число t, что $\{x_n\} = \{x_{n+t}\}$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Целое число t, удовлетворяющее этому условию, будем называть *длиной периода* этой последовательности. Необязательно рассматривать наименьший период. Любая последовательность $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{Q}$, удовлетворяющая (1), является периодической по модулю 1. Всякий период может быть представлен в виде

$$\frac{r_1}{z}, \frac{r_2}{z}, \dots, \frac{r_t}{z}, \qquad \text{где } z \in \mathbb{N}, r_1, \dots, r_t \in \mathbb{Z}, 0 \le r_1, \dots, r_t < z. \tag{2}$$

Положим

$$L(X) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}} \liminf_{n\to\infty} ||\xi x_n||, \quad L(\alpha) := \liminf_{n\to\infty} ||\xi\alpha^n||.$$

Легко показать, что если $X = (x_n)_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет (1), то

$$L(X) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n \to 0 \text{ при } n \to \infty, \\ L(\alpha), & \text{если } x_n \nrightarrow 0 \text{ при } n \to \infty. \end{cases}$$

Лемма (Дубицкас). Пусть α — число Пизо и минимальным многочленом для α является

$$P(x) = x^d - a_1 x^{d-1} - a_2 x^{d-2} - \dots - a_k x^{d-k} - \dots a_{d-1} x - a_d.$$

Пусть существует периодическая по модулю 1 последовательность, удовлетворяющая (1) и имеющая период (2). Тогда

$$L(\alpha) \ge \min_{i=1,\dots,t} \left\| \frac{r_i}{z} \right\|.$$

Положим

$$s_{j,t} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\equiv j \pmod t}}^{d} a_i, \qquad \text{при } j = 1 \dots t.$$

В частности,

$$s_{1,1} = \sum_{i=1}^{d} a_i, \qquad s_{1,2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\text{ — нечетное}}}^{d} a_i, \qquad s_{2,2} = \sum_{\substack{i=1 \\ i\text{ — четное}}}^{d} a_i.$$

Очевидно, что для того, чтобы числа из (2) являлись периодом последовательности, удовлетворяющей (1), должна быть выполнена следующая система сравнений

$$\begin{cases} s_{t,t}r_1 + s_{t-1,t}r_2 + \ldots + s_{2,t}r_{t-1} + s_{1,t}r_t \equiv r_1 \pmod z \\ s_{t,t}r_2 + s_{t-1,t}r_3 + \ldots + s_{2,t}r_t + s_{1,t}r_1 \equiv r_2 \pmod z \\ \ldots \\ s_{t,t}r_{t-1} + s_{t-1,t}r_t + \ldots + s_{2,t}r_{t-3} + s_{1,t}r_{t-2} \equiv r_{t-1} \pmod z \\ s_{t,t}r_t + s_{t-1,t}r_1 + \ldots + s_{2,t}r_{t-2} + s_{1,t}r_{t-1} \equiv r_t \pmod z. \end{cases} \tag{3}$$

Были найдены следующие последовательности.

Случай 1. *Пусть* $\sum_{i=1}^{d} a_i$ *— четное. Положим* $A := s_{1,1} - 1$. *Тогда*

$$\begin{cases} z = 2A, \\ r_1 = A - 1 \end{cases}$$

удовлетворяют (3) при $t = 1$.

Случай 2. *Пусть* $\sum_{i=1}^{d} a_i$ *— четное. Положим* $A := s_{1,2}, B := s_{2,2} - 1$. *Тогда*

$$\begin{cases} z = 2A - 2B, \\ r_1 = A - B - 1, \\ r_2 = A - B + 1. \end{cases}$$

удовлетворяют (3) при $t = 2$.

Случай 3. *Пусть* $\sum_{i=1}^{d} a_i$ *— четное. Положим* $A := s_{1,4}, B := s_{2,4}, C := s_{3,4}, D := s_{4,4} - 1$. *Тогда*

$$\begin{cases} z = 2(A - C)^2 + 2(B - D)^2, \\ r_1 = (A - C)^2 - (A - C) + (B - D)^2 - (B - D), \\ r_2 = (A - C)^2 - (A - C) + (B - D)^2 + (B - D), \\ r_3 = (A - C)^2 + (A - C) + (B - D)^2 + (B - D), \\ r_4 = (A - C)^2 + (A - C) + (B - D)^2 - (B - D). \end{cases}$$

удовлетворяют (3) при $t = 4$.

Случай 4. *Пусть* $A + B + C \equiv 1 \pmod 3$. *Тогда*

$$\begin{cases} z = A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC \\ r_1 = (z - A - B - C)/3 + A \\ r_2 = (z - A - B - C)/3 + C \\ r_3 = (z - A - B - C)/3 + B. \end{cases} \tag{4}$$

задает периодическую последовательность вида (2) при $t = 3$.

Случай 5. *Пусть* $A + B + C \equiv 2 \pmod 3$. *Тогда*

$$\begin{cases} z = A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC \\ r_1 = (z + A + B + C)/3 - A \\ r_2 = (z + A + B + C)/3 - C \\ r_3 = (z + A + B + C)/3 - B. \end{cases} \tag{5}$$

задает периодическую последовательность вида (2) при $t = 3$.

Случай 6. *Пусть* $A + B + C \equiv 0 \pmod 3$. *Тогда*

$$\begin{cases} z = A^2 + B^2 + C^2 - AB - AC - BC \\ r_1 = kz/3 + A - B \\ r_2 = kz/3 + C - A \\ r_3 = kz/3 + B - C, \end{cases} \tag{6}$$

где k *— это произвольное целое число, задает периодическую последовательность вида (2) при* $t = 3$.

Нахождение этих формул потребовало большого объема компьютерных вычислений.

Приведенные последовательности согласно лемме Дубицкаса дают оценки снизу для $L(\alpha)$. Для чисел Пизо степени 2 и 3 оценки точны. Но доказательство точности оценок требует других методов. Для этого был придуман специальный компьютерный алгоритм.

Одним из способов посчитать $L(\alpha)$ является поиск максимума по всем последовательностям вида (1). Каждая последовательность вида (1) задается своими d первыми элементами. Определим функцию

$$R_k(X) := \min_{1 \le i \le k} ||x_i||. \tag{7}$$

Это кусочно-линейная функция от d переменных. Для нахождения ее максимума достаточно рассмотреть все точки $(x_1, x_2, ..., x_d)$ из единичного d-мерного куба.

Пусть $H \in [0, 1/2]$, а $M_i = \{(x_1, ..., x_d) \in [0, 1]^d : ||x_i|| < H\}$.

Будем последовательно отрезать M_i от единичного куба. Если $H > L(\alpha)$, то на каком-то шаге ничего не останется. Если $H < L(\alpha)$, но достаточно близко к $L(\alpha)$, то на некотором шаге останутся "небольшие" выпуклые множества точек, которым принадлежит искомый максимум. А дальше уже аналитическими методами исследуем оставившиеся множества.

Приведем пример работы алгоритма для $\alpha = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $H = 0,195$ (в этом случае $L(\alpha) = 1/5$)

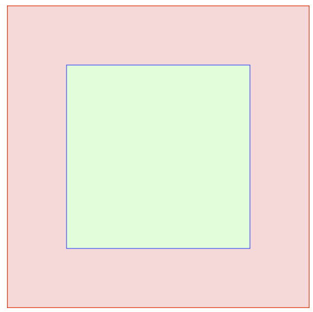

Рис. 1: Без M_1, M_2

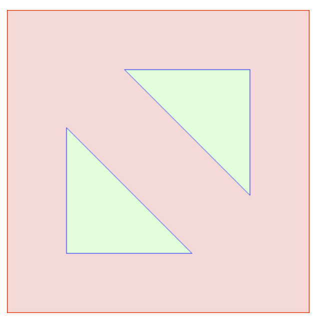

Рис. 2: Без M_1, M_2, M_3

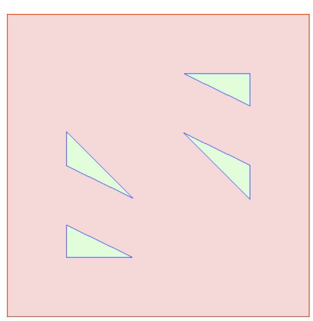

Рис. 3: Без M_1, M_2, M_3, M_4

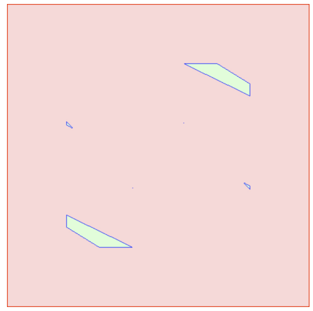

Рис. 4: Без M_1, M_2, M_3, M_4, M_5

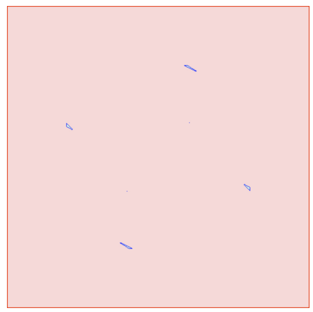

Рис. 5: Без $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6$

И теперь вместо детального рассмотрения функции на всем единичном квадрате (что было сделано автором в одной из предыдущих статей) можно сузить область поиска до небольших множеств.

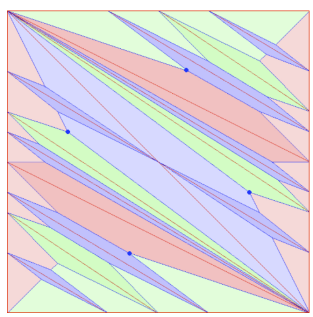

Рис. 6: Детальное рассмотрение

С помощью данного алгоритма получены верхние оценки для некоторых чисел Пизо 4 степени.

2 Работы, опубликованные и поданные в печать

- *Периодические последовательности по модулю 1 и числа Пизо*. Матем. заметки (принято в печать, ориентировочная дата выхода — 1 квартал 2017)

- *Convex envelopes and Pisot numbers* Exper. Math. (submitted)

3 Участие в конференциях и школах

- International conference ”Analytic and Probabilistic Methods in Number Theory”, Palanga, Lithuania (11—17 September 2016)
- ”Arbeitsgemeinschaft: Diophantine Approximation, Fractal Geometry and Dynamics”, Oberwolfach, Germany (9—14 October 2016) — invited speaker

4 Педагогическая деятельность

На кафедре математики СУНЦ МГУ:

- Алгебра (двугодичный поток (2015–2017), математические классы) — семинары (совместно с Вавиловым В.В. и Курышовой Ю.В.), лекции
- Алгебра (двугодичный поток (2016–2018), математические классы) — семинары (совместно с Довбышем С.А., Мощевитиным Н.Г., Шкаликовой Н.А., Шавгулидзе Н.Е.)
- Математческий анализ (одногодичный поток (2015–2016), математические классы) — семинары (совместно с Довбышем С.А. и Меньщиковым А.Б.)
- Олимпиадная математика (кружок, совместно с Пономаревым А.А., Трещевым В.Д., Тихоновым Ю.В.)

5 Работа в редколлегиях журналов

С января 2016 года являюсь исполнительным редактором журнала ”Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory” (главные редакторы Мощевитин Н.Г. и Райгородский А.М.)