Отчёт по гранту
«Молодая математика России»
за 2018 год
Елена Бунькова

1. Результаты, полученные в этом году

1.1. **Теория сигма-функций. Приложения к уравнениям математической физики.**

Задача дифференцирования абелевых функций по параметрам поставлена в [1]. Она является обобщением на многомерный случай классического результата Ф. Г. Фробениуса и Л. Штикельбергера 1882-го года [2], построивших образующие алгебры Ли дифференцирований эллиптических функций:

$$\mathcal{L}_0 = 4\lambda_4\partial_{\lambda_4} + 6\lambda_6\partial_{\lambda_6} - z\partial_z, \qquad \mathcal{L}_1 = \partial_z, \qquad \mathcal{L}_2 = 6\lambda_6\partial_{\lambda_4} - \frac{4}{3}\lambda_4^2\partial_{\lambda_6} - \zeta(z;\lambda_4,\lambda_6)\partial_z.$$

Эллиптической функцией [3] называется мероморфная функция $f(z)$ на $\mathbb{C}$, имеющая решётку периодов Γ, то есть удовлетворяющая условию $f(z+\omega) = f(z)$ для любого $\omega \in \Gamma$. Тор $\mathbb{C}/\Gamma$ является якобианом эллиптической кривой $Y^2 = X^3 + \lambda_4 X + \lambda_6$, и таким образом параметры (λ_4, λ_6) эллиптической кривой параметризуют решётки Γ. Любую эллиптическую функцию можно представить как рациональную функцию от функции Вейерштрасса $\wp(z;\lambda_4,\lambda_6)$ с теми же периодами, и её производной по z. Таким образом, мы получаем мероморфную функцию $f(z,\lambda_4,\lambda_6)$ от трёх переменных. Обратим внимание, что $\partial_z f(z,\lambda_4,\lambda_6)$ – также эллиптическая функция с теми же периодами, что и $f(z,\lambda_4,\lambda_6)$, но $\partial_{\lambda_4} f(z,\lambda_4,\lambda_6)$ и $\partial_{\lambda_6} f(z,\lambda_4,\lambda_6)$, в общем случае — мероморфные, но не эллиптические функции. Для построенных полей $(\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$ и эллиптической функции f мероморфная функция $\mathcal{L}_k f$ является эллиптической.

Для рода $g > 1$ мы рассматриваем задачу дифференцирования гиперэллиптических функций, заданных на якобианах гиперэллиптических кривых рода g в модели

$$\mathcal{V}_\lambda = \{(X,Y) \in \mathbb{C}^2 \colon Y^2 = X^{2g+1} + \lambda_4 X^{2g-1} + \lambda_6 X^{2g-2} + \ldots + \lambda_{4g} X + \lambda_{4g+2}\}.$$

Задача состоит в построении $3g$ образующих алгебры Ли дифференцирований таких функций. В работе [4] эта задача решена для рода $g = 2$, в работе “Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions” эта задача решена для рода $g = 3$. В “The Problem of Differentiation of Hyperelliptic Functions” разрабатывается метод для решения этой задачи для любого рода g. Планируется применить этот метод в случае $g = 4$.

Разработанный метод основан на построении $3g$ полиномальных векторных полей, проектируемых относительно заданного полиномиального отображения. Эти поля градуированы. Явно построены g векторных полей нечётной градуировки. Получены условия на алгебру Ли для $2g$ векторных полей чётной градуировки.

На основе результатов для рода $g = 3$ построены явно уравнения теплопроводности в неголономном репере на гиперэллиптическую сигма-функцию Клейна рода 3.

1.2. **Формальные группы и роды Хирцебруха.**

Эллиптической функцией уровня N с решёткой Γ называется мероморфная функция f, такая что $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, и $g(z) = f(z)^N$ является эллиптической функцией с решёткой периодов Γ и дивизором $N \cdot 0 - N \cdot \rho$ для $\rho \in \mathbb{C}$. Эллиптическая функция уровня N определяет эллиптический род уровня N.

Функциональным уравнением Хирцебруха называется уравнение (см. [5])

$$\sum_{i=1}^{n}\prod_{j\neq i}\frac{1}{f(z_j-z_i)}=c$$

с константой c и начальными условиями $f(0)=0, f'(0)=1$. В работе "Функциональное уравнение Хирцебруха: классификация решений" найдены все решения этого уравнения для $n\leqslant 6$ в классе мероморфных функций и в классе рядов. Ранее, подобные результаты были известны лишь для $n\leqslant 4$.

Эта задача происходит из теории родов Хирцебруха. Род Хирцебруха является одним из важнейших классов инвариантов многообразий. Ряд $f(z)=z+\sum_{k=1}^{\infty}f_k z^{k+1}$, где коэффициенты f_k лежат в кольце R, определяет род Хирцебруха стабильно комплексных многообразий [6, раздел E.3]. Условие, что комплексный род послойно мультипликативен относительно $\mathbb{C}P^{n-1}$ задаётся функциональным уравнением Хирцебруха на функцию $f(z)$ (см. [5, глава 4], [6, глава 9]).

Функцией Тодда называется функция $f(z)=(e^{az}-e^{bz})/(ae^{bz}-be^{az})$, определяющая двупараметрический род Тодда (то есть $\chi_{a,b}$-род). Она является решением функционального уравнения Хирцебруха для любого n. Эллиптическая функция уровня N является решением функционального уравнения Хирцебруха для n делящихся на N.

Рядом, соответствующим мероморфной функции f с параметрами в $U\subset\mathbb{C}^k$, мы называем ряд с параметрами в замыкании U по Зарисскому в $\mathbb{C}^k$, такой что для параметров в U этот ряд совпадает с разложением в ряд функции f в нуле.

Мы получили, что

- Любое решение в классе рядов функционального уравнения Хирцебруха для $n=5$ соответствует функции Тодда либо эллиптической функции уровня 5.
- Любое решение в классе рядов функционального уравнения Хирцебруха для $n=6$ соответствует функции Тодда либо эллиптической функции уровня 2, 3 или 6.
- Любое решение функционального уравнения Хирцебруха для $3\leqslant n\leqslant 6$ в классе мероморфных функций с начальными условиями $f(0)=0, f'(0)=1$ является одним из следующих:
  - Функция Тодда, где $(-1)^n(a-b)c=-(a^n-b^n)$ и $a\neq b$.
  - Рациональная функция $z/(1+q_1z)$, где $c=nq_1^{n-1}$.
  - Эллиптическая функция уровня N, где $N\mid n$ и $c=0$.
  - Функция $\exp(\alpha z)\operatorname{sh}(\eta z)/\eta$, где $N\alpha=(N-2k)\eta$ для $k=1,2,\dots,[N/2]$ и $N\mid n$, $\eta\neq 0$, $c=0$.

Это даёт полную классификацию комплексных родов, послойно мультипликативных относительно $\mathbb{C}P^{n-1}$ для $n\leqslant 6$. Топологическим приложением данной работы является эффективное вычисление коэффициентов эллиптических родов уровня N для $N=2,3,4,5,6$ в терминах решений дифференциального уравнения с параметрами в неприводимом алгебраическом многообразии в $\mathbb{C}^4$.

В работе "Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N" впервые получены универсальные формальные группы, соответствующие эллиптическому роду уровня N, где $N=5,6,7$. Предложена специализация формальной группы Бухштабера [6, (E.30)], задающая формальные группы, соответствующие эллиптическому роду уровня N. Это предложение доказано для $N=3,4,5,6$.

2. Научные работы за год

- Опубликована работа Elena Yu. Bunkova, “Differentiation of genus 3 hyperelliptic functions”, European Journal of Mathematics, 4:1 (2018), 93–112, arXiv:1703.03947.
- Опубликована работа Е. Ю. Бунькова, “Функциональное уравнение Хирцебруха: классификация решений”, Топология и физика, Сборник статей. К 80-летию со дня рождения академика Сергея Петровича Новикова, Тр. МИАН, 302, МАИК «Наука/Интерпериодика», М., 2018, 41–56, arXiv: 1803.01398.
- Подана в печать работа Е. Ю. Бунькова, “Универсальная формальная группа для эллиптического рода уровня N”, Тр. МИАН, 2019.
- Подготовлена работа Elena Yu. Bunkova, “The Problem of Differentiation of Hyperelliptic Functions”, arxiv:1812.04245.

3. Участие в конференциях и школах

- Приглашённый доклад “Differentiation of Hyperelliptic Functions”, Workshop - Numerical methods for algebraic curves, Rennes, Франция, 22 февраля 2018.
- Приглашённый доклад “Hirzebruch functional equations”, Международная конференция «Алгебраическая топология, комбинаторика и математическая физика», посвященная 75-летию со дня рождения члена-корреспондента РАН В.М. Бухштабера, Москва, 24 мая 2018.
- Пленарный доклад “Уравнение Кортевега–де Фриза и задача дифференцирования абелевых функций по параметрам”, конференция Декабрьские чтения в Томске, Томск, 15 декабря 2018.

Также приняла участие в школах

- “School on Birational Geometry of Hypersurfaces”, 19-23 марта 2018, Gargnano del Garda, Италия.
- Седьмая школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, 18-26 августа 2018, Самара.

4. Педагогическая деятельность

Приняла участие в проведении и проверке LXXXI Московской Математической Олимпиады.

Список литературы

[1] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, “Решение задачи дифференцирования абелевых функций по параметрам для семейств (n,s)-кривых”, Функц. анализ и его прил., 42:4, 2008, 24–36.

[2] F. G. Frobenius, L. Stickelberger, *Über die Differentiation der elliptischen Functionen nach den Perioden und Invarianten*, J. Reine Angew. Math., 92 (1882), 311–337.

[3] Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон *Курс современного анализа, ч. 2. Трансцендентные функции*, Москва, УРСС, 2010.

[4] В. М. Бухштабер, “Полиномиальные динамические системы и уравнение Кортевега–де Фриза”, Современные проблемы математики, механики и математической физики. II, Сборник статей, Тр. МИАН, 294, МАИК, М., 2016.

[5] F. Hirzebruch, T. Berger, R. Jung, *Manifolds and modular forms*, Aspects Math., E20, Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1992.

[6] V. M. Buchstaber, T. E. Panov, *Toric Topology*, Mathematical Surveys and Monographs, 204, Amer. Math. Soc., 2015.