Отчет по гранту конкурса “Молодая математика России” за 2017 год

Егор Косов

1. Полученные результаты

В отчетный период исследовались пространства Никольского и Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах. Основные результаты, полученные за этот год заключаются в следующем:

1. Получено эквивалентное описании пространств Никольского и Бесова в терминах действия на пробные функции, в духе классического определения Соболевевских пространств;
2. На основе идей из пункта 1 определены пространства Никольского и Бесова на бесконечномерном пространстве с гауссовской мерой;
3. Начато исследование взаимосвязи функциональных пространств из пункта 2 с уже имеющимися гауссовскими классами дробной дифференцируемости;
4. Дана характеризация гауссовских пространств Никольского и Бесова из пункта 2 в терминах полугруппы Орншиейна–Уленбека;
5. Получена теорема вложения логарифмического типа для гауссовских классов Никольского и Бесова.

Напомним, что пространство Никольского $B^{\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1,+\infty)$ и $\alpha \in (0,1)$ состоит из всех таких функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, что для некоторой абсолютной постоянной C и каждого вектора $h \in \mathbb{R}^n$ выполнено

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx\right)^{1/p} \le C|h|^{\alpha}.$$

Иначе это можно переформулировать в виде

$$\|f_h - f\|_p \le C|h|^{\alpha},$$

где $f_h(x) := f(x-h)$. Более общая шкала пространств Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ с параметрами $\alpha \in (0,1)$, $p \in [1,\infty)$, $\theta \in [1,\infty]$ состоит из всех таких функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, что

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left[|h|^{-\alpha}\|f_h - f\|_p\right]^{\theta} |h|^{-n} dh\right)^{1/\theta} < \infty.$$

Интерес к этим классическим аналитическим объектам вызван не только вопросами теории функций, но и недавними исследованиями по теории вероятностей. В частности, в работе [1] доказан следующий результат. Рассмотрим вероятностное пространство $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$, где $\mathcal{B}$ — сигма алгебра Борелевских множеств на $\mathbb{R}^n$, а вероятностная мера μ является равномерно распределенной на выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^n$ или является стандартной гауссовской мерой, т.е. мерой с плотностью

$$(2\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/2). \tag{1}$$

Теорема 1. *Для всякого натурального числа d найдется такая постоянная $C(d)$, зависящая только от d, что для произвольного многочлена f степени d на $\mathbb{R}^n$ выполнено*

$$\sigma_f^{1/d}\|\rho_f(\cdot - h) - \rho_f\|_1 \le C(d)|h|^{1/d},$$

где σ_f^2 — дисперсия f, как случайной величины на вероятностном пространстве $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$, ρ_f — плотность распределения случайной величины f. То есть, теорема утверждает, что плотность $\rho_f \in B^{1/d}_{1,\infty}(\mathbb{R})$.

В силу того, что оценка не зависит от размерности, результат легко переносится на бесконечномерный случай, в частности на случай классической меры Винера. В работе

[2] был получен аналогичный результат для многомерных полиномиальных отображений гауссовских мер. Более того, теорема 1 и результаты из [2] позволяют усилить и обобщить результаты Нурдина, Поли [3] и Нурдина, Нуаларта, Поли [4] об оценках расстояния по вариации между кратными стохастическими интегралами через метрику Канторовича, задающую сходимость случайных величин по распределению (слабую сходимость распределений). Таким образом, пространства Никольского и Бесова естественным образом возникают при изучении вопросов теории вероятностей.

Одним из ключевых моментов в доказательстве теоремы 1 было следующее достаточное условие принадлежности функции $f \in L^1(\mathbb{R})$ пространству $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R})$. Пусть для любой функции $\varphi \in C_b^{\infty}(\mathbb{R})$ выполнено

$$\int \varphi'(x) f(x)\, dx \le C\|\varphi\|_{\infty}^{\alpha}\|\varphi'\|_{\infty}^{1-\alpha}. \tag{2}$$

Тогда $\|f_h - f\|_1 \le 2^{1-\alpha}C|h|^{\alpha}$ для произвольного h и в частности $f \in B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R})$. В [2] использован многомерный вариант данного утверждения. Возник естественный вопрос, является ли условие (2) необходимым для принадлежности функции пространству Никольского $B^{\alpha}_{1,\infty}(\mathbb{R})$? Также возникает вопрос об аналогичной эквивалентной характеризации классов $B^{\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n)$ и общих пространств Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$. Ответам на эти вопросы в первую очередь и было посвящено исследование за отчетный год.

В работе [9] получен положительный ответ на вопрос выше об эквивалентном описании пространств Никольского в терминах действия на пробные функции, что схоже с классическим определением пространств Соболева. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 2. Для функции $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ при $\alpha \in (0,1)$ выполнено:

$$f \in B^{\alpha}_{p,\infty}(\mathbb{R}^n) \Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\Phi(x) f(x)\, dx \le C\|\Phi\|^{\alpha}_{\frac{p}{p-1}}\|\mathrm{div}\Phi\|^{1-\alpha}_{\frac{p}{p-1}} \quad \forall\, \Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

В частности, эта теорема показывает, что в одномерном случае при $p = 1$ условие (2) является как достаточным, так и необходимым. В [10] получено обобщение этой теоремы на общие пространства Бесова. Для начала напомним, что L^p-модулем непрерывности функции f называется функция $\omega_p(f,\cdot)$, заданная равенством

$$\omega_p(f,\varepsilon) := \sup_{|h|\le\varepsilon}\|f_h - f\|_p.$$

В работе [10] доказана эквивалентность модуля непрерывности $\omega_p(f,\cdot)$ и определенного в этой работе модуля непрерывности $\sigma_p(f,\cdot)$:

$$\sigma_p(f,\varepsilon) := \sup\Bigl\{\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}\Phi(x) f(x) dx,\ \Phi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n), \|\mathrm{div}\Phi\|_{\frac{p}{p-1}} \le 1, \|\Phi\|_{\frac{p}{p-1}} \le \varepsilon\Bigr\}.$$

А именно, выполнено соотношение:

$$2^{-1}\omega_p(f,2\varepsilon) \le \sigma_p(f,\varepsilon) \le 6n\,\omega_p(f,\varepsilon).$$

Отсюда легко следует следующая теорема.

Теорема 3. Функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Бесова $B^{\alpha}_{p,\theta}(\mathbb{R}^n)$ тогда и только тогда, когда

$$\Bigl(\int_0^{\infty}\bigl[s^{-\alpha}\sigma_p(f,s)\bigr]^{\theta}s^{-1}ds\Bigr)^{1/\theta} < \infty.$$

Получив такую характеризацию пространств Бесова и Никольского в классическом случае, возникает естественное желание использовать полученное описание в качестве определения в неклассической ситуации, когда сдвиг функции $f \mapsto f_h$ плохо определен (или вообще такую операцию определить нельзя). Такое например происходит уже в конечномерном случае, если рассматривать весовые пространства $L^p(\gamma)$, где γ — стандартная гауссовская мера на $\mathbb{R}^n$ (т.е. мера с плотностью (1)). В этом случае операция сдвига функции может выводить за пределы пространства $L^p(\gamma)$. В тоже время, в гауссовском случае корректно определен естественный аналог дивергенции:

$$\mathrm{div}_\gamma \Phi = \sum_{i=1}^{n} (\partial_i \Phi_i - x_i \Phi_i) = \mathrm{div}\Phi - \langle x, \Phi \rangle,$$

т.е. это оператор "сопряженный" к градиенту:

$$\int_X (\mathrm{div}_\gamma \Phi)\varphi \, d\gamma = -\int_X \langle \Phi, \nabla\varphi \rangle \, d\gamma, \ \forall \Phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n), \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, заменив обычный оператор дивергенции гауссовским оператором div_γ, можно принять свойство из теоремы 2 за определение гауссовских классов Никольского (конечно, все интегральные нормы при таком определение тоже должны браться относительно гауссовской меры). Аналогично, простой заменой дивергенции на div_γ, определяется функция $\sigma_{\gamma,p}(f, \cdot)$ — гауссовский аналог модуля непрерывности $\sigma_p(f, \cdot)$. Это дает возможность перейти к рассмотрению общих классов Бесова $B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$ на гауссовском пространстве . Также отметим, что все конструкции переносятся на бесконечномерный случай (в частности, оператор гауссовской дивергенции div_γ становится так называемым интегралом Скорохода).

Вторым основным направлением исследования было изучение свойств определенных выше функциональных пространств Бесова и Никольского по гауссовским мерам. В этом направлении было получено несколько важных результатов. Во-первых, было получено описание гауссовских пространств Никольского и Бесова в терминах свойств полугруппы Орнштейна–Уленбека (аналог полугруппы теплопроводности для гауссовской меры). Во-вторых, было начато исследование взаимосвязи так определенных функциональных классов с уже известными классами дробной дифференцируемости на пространстве с гауссовской мерой. Третьим основным результатом в данном направление является теорема вложения логарифмического типа для классов Бесова по гауссовской мере. Классическое логарифмическое неравенство Соболева для гауссовской меры утверждает, что

$$\int f^2 \ln(|f| \|f\|_2^{-1}) d\gamma \le \int |\nabla f|^2 d\gamma.$$

В работе [10] получен аналог данного неравенства для функций из определенного выше гауссовского пространства Бесова $B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$. А именно, верна следующая теорема.

Теорема 4. Для любой функции $f \in B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)$, где $p \in (1, \infty)$, и для любого числа $\beta \in (0, \alpha)$ функция $|f| |\ln |f||^{\beta/2}$ принадлежит пространству $L^p(\gamma)$. Более того,

$$\Bigl(\int |f|^p \bigl|\ln(|f| \|f\|_p^{-1})\bigr|^{p\beta/2} \, d\gamma\Bigr)^{1/p} \le C\|f\|_{B^\alpha_{p,\theta}(\gamma)}$$

для некоторой постоянной $C = C(p, \theta, \alpha, \beta)$.

За отчетный период опубликовано 3 заметки в Докладах Академии наук ([5], [6], [7]) и еще одна заметка [8] находится в печати. Также выложено 2 архивных препринта [9], [10].

Список литературы

[1] Kosov E.D., *Fractional smoothness of images of logarithmically concave measures under polynomials*, arXiv:1605.00162

[2] Bogachev V.I., Kosov E.D., Zelenov G.I., *Fractional smoothness of distributions of polynomials and a fractional analog of the Hardy–Landau–Littlewood inequality*, arXiv:1602.05207

[3] Nourdin I., Poly G. *Convergence in total variation on Wiener chaos.* Stochastic Processes Appl., 123:2 (2013), 651–674.

[4] Nourdin I., Nualart D., Poly G. *Absolute continuity and convergence of densities for random vectors on Wiener chaos.* Electron. J. Probab., 18:22 (2013), 1–19.

[5] Косов Е.Д., *Характеризация классов Бесова через новый модуль непрерывности*, Доклады Академии наук, 477:4 (2017), 398–401.
[6] Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *Характеризация классов Никольского-Бесова через интегрирование по частям*, Доклады Академии наук, 476:3 (2017), 251–255.
[7] Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *О гауссовских классах Никольского-Бесова*, Доклады Академии наук, 476:6 (2017), 609–613.
[8] Косов Е.Д., *Классы Бесова на пространстве с гауссовской мерой*, принята к публикации в журнале Доклады Академии наук, 478:2 (2018).
[9] Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N., *A new approach to Nikolskii-Besov classes*, arXiv:1707.06477
[10] Kosov E.D., *Besov classes on finite- and infinite-dimensional spaces and embedding theorems*, arXiv:1711.01659

2. Опубликованные и поданные в печать работы

1. Косов Е.Д., *Характеризация классов Бесова через новый модуль непрерывности*, Доклады Академии наук, 477:4 (2017), 398–401.
2. Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *Характеризация классов Никольского-Бесова через интегрирование по частям*, Доклады Академии наук, 476:3 (2017), 251–255.
3. Богачев В.И., Косов Е.Д., Попова С.Н., *О гауссовских классах Никольского-Бесова*, Доклады Академии наук, 476:6 (2017), 609–613.
4. Косов Е.Д., *Классы Бесова на пространстве с гауссовской мерой*, принята к публикации в журнале Доклады Академии наук, 478:2 (2018).
5. Bogachev V.I., Kosov E.D., Popova S.N., *A new approach to Nikolskii-Besov classes*, arXiv:1707.06477
6. Kosov E.D., *Besov classes on finite- and infinite-dimensional spaces and embedding theorems*, arXiv:1711.01659

3. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

1. Доклад "Пространства Никольского–Бесова на конечномерных и бесконечномерных пространствах и их приложения в вопросах вероятности" на научно-исследовательском семинар "Теория вероятностей. Аналитические и экономические приложения", ВШЭ, 2017.
2. Доклад "Besov spaces with respect to a Gaussian measure" на международном научно-исследовательском семинаре "Infinite-dimensional stochastic analysis" в университете г. Билефельда, Германия, 2017.

4. Педагогическая деятельность

Весна 2017: семинары по теории вероятностей и математической статистике, семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ.

Осень 2017: семинары по теории вероятностей и математической статистике, семинары по математическому анализу на Факультете Компьютерных Наук ВШЭ; семинары по математическому анализу на мехмате МГУ.