ОТЧЕТ ЗА 2019 ГОД И ИТОГОВЫЙ ОТЧЕТ

по гранту “Молодая математика России”

Анастасия Ставрова

1. Результаты научных исследований, полученные в 2019 году

1. Гипотеза Черноусова-Жиля-Піянсолы о главных G-расслоениях над многочленами Лорана. Одной из долгосрочных тем моих исследований является изучение главных G-расслоений и групп точек для изотропных редуктивных групп G над кольцами многочленов. Расщепимые редуктивные группы также называются групповыми схемами Шевалле – Демазюра или просто группами Шевалле; к ним относятся, в частности, линейные группы матриц SL_n, Sp_n, SO_n. Общие редуктивные группы являются скрученными формами групп Шевалле – Демазюра. Понятие изотропности редуктивной группы происходит от понятия изотропности для квадратичных форм; в частности, изотропный ранг $\mathrm{SO}(q)$ равен индексу Витта формы q.

В 1976 г. Д. Квиллен и А. Суслин независимо доказали гипотезу Серра о том, что любой конечно-порожденный проективный модуль (а значит, и любое главное GL_n-расслоение) над кольцом многочленов $k[x_1, \ldots, x_n]$ над полем является свободным. В 1978 г. Р. Суон обобщил этот результат на кольца многочленов Лорана $k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$ от нескольких переменных. В 2008 г. Ф. Жиль и А. Пиянсола доказали тривиальность любого локально тривиального главного G-расслоения над $R = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, при условии, что k – поле характеристики 0 и G – изотропная редуктивная группа над k. В 2015 г. в своем препринте “A classification of torsors over Laurent polynomial rings” (опубликован в Comment. Math. Helv. в 2017 г.) В. Черноусов, Ф. Жиль и А. Пиянсола сформулровали гипотезу, что аналогичное утверждение верно, если G определена не над k, а только над R, и содержит максимальный R-тор. Эта гипотеза была мною доказана в 2019 году.

Теорема 1. [St3] *Пусть k – поле характеристики 0 и $R = k[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, $n \geq 1$. Пусть G – редуктивная групповая схема над R изотропного ранга ≥ 1, имеющая максимальный R-тор. Тогда любое главное G-расслоение над R, тривиальное локально в топологии Зариского, тривиально.*

2. $\mathbb{A}^1$-инвариантность нестабильных K_1-функторов на равнохарактеристических регулярных кольцах.

В 1977 г. А. Суслин доказал, что

$$\mathrm{SL}_N(R[x_1, \ldots, x_n]) = \mathrm{SL}_N(R) E_N(R[x_1, \ldots, x_n])$$

для любого $N \geq 3$ и $n \geq 1$ и любого дедекиндова кольца R, где $E_N(-)$ — подгруппа в $\mathrm{SL}_N(-)$, порожденная матрицами элементарных преобразований I рода. Аналогом подгруппы $E_N(-)$ в группе точек $G(-)$ произвольной изотропной редуктивны группах G является подгруппа $E(-)$, порожденная точками унипотентных радикалов собственных параболических подгрупп (их можно интерпретировать как обобщенные элементарные корневые унипотенты). Фактор-группа $K_1^G(-) = G(-)/E(-)$ называется нестабильным K_1-функтором, ассоциированным с G, или группой Уайтхеда G. В 2014 г. я доказала (обобщая более ранние результаты Э. Абе, А. Суслина, Б. Марго и др.), что для любой редуктивной группы G изотропного ранга ≥ 2, определенной над совершенным полем k, и любого регулярного кольца R, содержащего k (в частности, R может быть координатным кольцом гладкого k-многообразия) выполнено $K_1^G(R[x]) = K_1^G(R)$, т.е. нестабильный K_1-функтор $\mathbb{A}^1$-инвариантен. В 2019 году я обобщила этот результат на случай, когда группа G определена над R (т.е. "непостоянна") и k – произвольное поле. Кроме того, было доказано, что для таких функторов выполнен аналог гипотезы Гротендика–Серра (Н. Вавилов, И. Панин, А. Ставрова, 2015; И. Панин, Р. Федоров, 2015; И. Панин, 2019).

Теорема 2. [St4] *Пусть G - редуктивная группа над регулярным кольцом R, содержащим поле k, и пусть G имеет изотропный ранг ≥ 2. Тогда $K_1^G(R[x]) = K_1^G(R)$. Если, кроме того, R локально, то $K_1^G(R)$ инъективно отображается в $K_1^G(K)$, где K – поле частных R.*

2. Публикации в 2019 году

[BDMSt] Lien Boelaert, Tom De Medts, and Anastasia Stavrova, *Moufang sets and structurable division algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **259** (2019), no. 1245, v+90.
(примечание: публикация была подана до назначения стипендии "Молодая математика России")

[St1] A. Stavrova, *Isotropic reductive groups over discrete Hodge algebras*, J. Homotopy Relat. Str. **14** (2019), 509–524.

[St2] A. Stavrova, *Chevalley groups of polynomial rings over Dedekind domains*, J. Group Theory (2019), https://www.degruyter.com/view/j/jgth.ahead-of-print/jgth-2019-0100/jgth-2019-0100.xml.

[St3] A. Stavrova, *Torsors of isotropic loop reductive groups over Laurent polynomials*, 2019, arXiv:1909.01984.

[St4] A. Stavrova, *A^1-invariance of non-stable K_1-functors in the geometric case*, 2019, arXiv:1912.05424.

3. Участие в конференциях в 2019 году

Приглашенные доклады:

• конференция "Petersburg Motives", 2-6 сентября 2019, ММИ им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия

• конференция "Actual problems of the theory of algebraic groups", 16-18 сентября 2019, РГПУ им. А. И. Герцена, Санкт-Петербург, Россия

• конференция "Homological algebra, ring theory and Hochschild cohomology", 28-30 октября 2019, ММИ им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия

Организация конференций:

• молодежная конференция "Emerging research in algebraic groups, motives, and K-theory", 9-13 сентября 2019, ММИ им. Л. Эйлера, Санкт-Петербург, Россия

• Oberwolfach mini-workshop "Rank One Groups and Exceptional Algebraic Groups", 10-16 ноября 2019, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Oberwolfach, Германия

4. Работа в научных центрах и международных группах в 2019 году

Оранизация 3-недельной программы "Algebraic Groups and Motives" Международного Математического Института им. Л. Эйлера (Санкт-Петербург), 26 августа-13 сентября 2019.

5. Педагогическая деятельность в 2019 году

В 2019 году проведен курс-семинар “Когомологии Галуа” для студентов-бакалавров 3-4 курсов (1 семестр, 1 пара в неделю) и лекционный курс “Коммутативная алгебра” (1 семестр, 1 пара в неделю) для студентов-бакалавров 4 курса на факультете математики и компьютерных наук Санкт-Петербургского Государственного Университета.

6. Итоговый отчет за 2017–2019 годы

В моей заявке в 2016 году были упомянуты следующие проблемы, которыми я планировала заниматься.

1. Было запланировано доказать $\mathbb{A}^1$-инвариантность нестабильного K_1-функтора K_1^G, т.е. утверждение $K_1^G(R[x]) = K_1^G(R)$, где R– регулярное кольцо, содержащее поле k, G – редуктивая групповая схема изотропного ранга ≥ 2 над R. Это было сделано, см. [St19-4]. Кроме того, был доказан аналог гипотезы Гротендика–Серра [Pa19] для этого случая. Более подробное описание этого результата содержится в разделе 1.

2. В качестве долгосрочного проекта я упомянула, во-первых, единообразное доказательство абелевости нестабильного K_1-функтора, также называемого в этом случае группой Уайтхеда, $K_1^G(k)$, где G - произвольная изотропная редуктивная группа над произвольным полем k, а также гипотеза Титса–Вайсса, утвержающая, что $K_1^G(k) = 1$ для всех k, если G – изотропная односвязная редуктивная группа типа $E_{8,2}^{78}$. Гипотеза Титса–Вайсса была, к сожалению, полностью доказана в 2019 году, в двух независимых работах M. Thakur и S. Alsaody, V. Chernousov, A. Pianzola [Th, AChP]. Мною были получены только небольшие продвижения – редукция случая характеристики 2 к характеристике 0, разрешимость K_1^G (не опубликовано). Единообразное доказательство абелевости тоже, к сожалению, пока не получено.

3. Было запланировано получить классификацию $E(R)$-нормализуемых подгрупп в $G(R)$, для любого коммутативного кольца R и любой редуктивной группы G над R изотропного ранга хотя бы 2. Это было сделано в совместной работе с А. В. Степановым в 2018 году [StSt]. Классификация нормальных подгрупп изотропных групп над коммутативным кольцом R до этого была известна для расщепимых редуктивных групп (Э. Абе, 1989), ортогональных групп (Л. Васерштейн, 1988), унитарных групп (Д. Джанг, 2010), для арифметических групп (Г. Маргулис, 1974; М. С. Рагунатан, 1976). Грубо говоря, нормальные подгруппы параметризуются идеалами R. Нами была доказана следующая теорема классификации.

Теорема 3. [StSt] *Пусть G - редуктивная группа над коммутативным кольцом R, имеющая изотропный ранг ≥ 2, и такая, что для любого максимального идеала $m \subseteq R$ структурные константы системы корней G_{R_m} обратимы в R. Тогда для любой нрмальной подгруппы $H \leq G(R)$ существует единственный идеал I в R, такой что*

$$E(R, I) \leq H \leq C(R, I),$$

где $E(R, I)$ – нормальное замыкание множества элементарных корневых унипотентов в $G(R)$, сравнимых с 1 по модулю I, а $C(R, I)$ – множество элементов $G(R)$, которые центральны по модулю I.

4. Кроме того, я планировала заниматься доказательством свойства Каждана (T) для элементарных подгрупп $E(R)$ изотропных редуктивных групп. Так как мои интересы несколько сместлись, этим вопросом я пока не занималась.

5. Я планировала дать общее определение группы Стейнберга и нестабильного K_2-функтора для изотропных редуктивных групп изотропного ранга 1 над коммутативным кольцом R в терминах неассоциативных структур йорданова типа, таких как пары Йордана-Кантора и структурируемые алгебры. Такое определение (с достаточно хорошими свойствами) уже, в принципе, может быть сформулировано, при условии, что $2, 3, 5 \in R^{\times}$. Однако меня такая общность не удовлетворяет, т.е. это не включит полностью определение V. Deodhar в случае поля и определение O. Loos в случае групп, параболические подгруппы в которых имеют абелев унипотентный радикал. Возникающее ограничение связано в значительной степени с отсутствием хорошего определения структурируемых алгебр в случае, когда 2,3 не обратимы, и некоторыми нарушениями в их поведении, когда 5 не обратимо. Попытки снять хотя бы ограничение в 5 привели к получению следующего результата, доказанного при помощи классификации конечномерных простых алгебр Ли над алгебраически замкнутым полем характеристики, отличной от 2 и 3, полученной в 2008 г. А. Преметом и Х. Штраде, а также моих совместных результатов с L. Boelaert, T. De Medts [BDMSt].

Теорема 4. [St17] *Следующие утверждения про центральную простую алгебру Ли L над полем характеристики $\neq 2, 3$ эквивалентны:*

- *L обладает нетривиальной 5-градуировкой;*
- *L является $\mathbb{Z}$-градуированной алгеброй Ли типа Шевалле;*
- *L строится по центральной простой структурируемой алгебре при помощи обобщенной конструкции Титса-Кантора-Кехера.*

Этот результат показывает, что классификация структурируемых алгебр и пар Кантора над алгебраически замкнутым полем характеристики 5 аналогична их классификации в характеристике > 5, полученной Б. Эллисоном (1978) и О. Смирновым (1992).

6. В случае, когда изотропный ранг редуктивной группы G хотя бы 2, существует естественное определение группы Стейнберга St^G в терминах элементарных корневых унипотентов и соотношений типа коммутационной формулы Шевалле, обобщающее классическое определение Р. Стейнберга (использованное Дж. Милнором для конструкции алгебраического K_2-функтора). Нестабильный K_2-функтор K_2^G определяется как ядро канонического гомоморфизма $\mathrm{St}^G(R) \to G(R)$. В моей заявке планировалось доказать, что K_2^G, как и K_1^G, является $\mathbb{A}^1$-инвариантным на регулярных кольцах. Я планировала заниматься этой проблемой совместно с более молодыми коллегами С. Синчуком и А. Лавреновым, так как они к тому моменту как раз доказали центральность K_2^G для расщепимых редуктивных групп симплектического типа и типов $D_l, E_6 - E_8$. Мы провел ряд обсуждений по этому вопросу, однако затем я решила выйти из этого проекта, оставив эту задачу им; они получили некоторое продвижение [LaSi].

В дополнение к вышеупомянутым результатам, в 2017–2019 гг. мною было также доказано следующее. Во-первых, в направлении изучения нестабильных K_1-функторов, были также получены начальные результаты для неравнохарактеристических регулярных колец. А именно, в [St19-2] было доксано, что если G – расщепимая редуктивная группа, т.е. группа Шевалле–Демазюра, ранга ≥ 2, и R – произвольное дедекиндово кольцо, то $K_1^G(R[x_1,\dots,x_n]) = K_1^G(R)$ любого $n \geq 1$. Это позволяет, для случая расщепимых групп, обобщить упомянутые выше результаты на регулярные кольца R, которые не содержат поле, но являются неразветвленными (т.е., для любой максимальной локализации R характеристика поля вычетов не лежит в квадрате максимального идеала). Данный результат исправляет ошибку в статье М. Вендта [W10].

Во-вторых, в [St19] было доказано, что если G – изотропная редуктивная группа над нетеровым кольцом R и $K_1^G(R) = K_1^G(R[x_1,\dots,x_n])$ для любого $n \geq 1$, то $K_1^G(R) = K_1^G(A)$ для любого фактор-кольца $A = R[x_1,\dots,x_n]/I$, где I – идеал, порожденный мономами (такие R-алгебры называются дискретными алгебрами Ходжа или кольцами Стэнли–Райснера). Аналогично, если все главные G-расслоения над $R[x_1,\dots,x_n]$ расширены с R, то и главные G-расслоения над A расширены с R. (Заметим, что множество классов изоморфизма локально тривиальных главных G-расслоений является с определенной точки зрения нестабильным K_0-функтором, ассоциированным с G, см. [AHW18].) Данные результаты обобщают результаты Т. Форста для GL_n (1983,1986), и актуализируют вопрос, для какого же класса колец, содержащего регулярные кольца, мы можем ожидать $\mathbb{A}^1$-инвариантность нестабильных K-функторов. Для обычной, стабильной алгебраической K-теории этот вопрос по существу решен G. Cortiñas, C. Haesemeyer, C. Weibel [CHW08], однако в нестабильном случае может играть роль изотропный ранг.

В-третьих, в [St19-3] была доказана гипотеза о главных G-расслоениях над кольцами многочленов Лорана, сформулировнная В. Черноусовым, Ф. Жилем и А. Пиянсолой в [ChGP17], см. раздел 1. А именно, было доказано, что если G– Изотропная редуктивная группа над кольцом многочленов Лорана R над полем характеристики 0, имеющая максимальный тор, то любое главное G-расслоение над R, тривиальное локально в топологии Зариского, тривиально.

Литература

[AChP] S. Alsaody, V. Chernousov, A. Pianzola, *On the Tits-Weiss Conjecture and the Kneser-Tits Conjecture for $E_{7,1}^{78}$ and $E_{8,2}^{78}$*, arXiv:1911.12908.

[AHW18] A. Asok, M. Hoyois, M. Wendt, *Affine representability results in $\mathbb{A}^1$-homotopy theory, II: Principal bundles and homogeneous spaces*, Geom. Topol. **22** (2018), no. 2, 1181–1225.

[BDMSt] L. Boelaert, T. De Medts, A. Stavrova, *Moufang sets and structurable division algebras*, Mem. Amer. Math. Soc. **259** (2019), no. 1245, v+90.

[ChGP17] V. Chernousov, P. Gille, and A. Pianzola, *A classification of torsors over Laurent polynomial rings*, Comment. Math. Helv. **92** (2017), no. 1, 37–55.

[CHW08] G. Cortiñas, C. Haesemeyer, and C. Weibel, *K-regularity, cdh-fibrant Hochschild homology, and a conjecture of Vorst*, J. Amer. Math. Soc. **21** (2008), no. 2, 547–561.

[LaSi] A. Lavrenov, S. Sinchuk, *A Horrocks-type theorem for even orthogonal K_2*, arXiv:1909.02637.

[Pa19] I. Panin, *Nice triples and the Grothendieck-Serre conjecture concerning principal* **G**-*bundles over reductive group schemes*, Duke Math. J. **168** (2019), no. 2, 351–375. MR 3909899

[St19] A. Stavrova, *Isotropic reductive groups over discrete Hodge algebras*, J. Homotopy Relat. Str. **14** (2019), 509–524.

[St19-2] A. Stavrova, *Chevalley groups of polynomial rings over Dedekind domains*, J. Group Theory (2019), https://www.degruyter.com/view/j/jgth.ahead-of-print/jgth-2019-0100/jgth-2019-0100.xml.

[St19-3] A. Stavrova, *Torsors of isotropic loop reductive groups over Laurent polynomials*, 2019, arXiv:1909.01984.

[St19-4] A. Stavrova, *A^1-invariance of non-stable K_1-functors in the geometric case*, 2019, arXiv:1912.05424.

[St17] A. Stavrova, *On the classification of Kantor pairs and structurable algebras in characteristic 5*, arXiv:1712.05288.

[StSt] A. Stavrova, A. Stepanov, *Normal structure of isotropic reductive groups over rings*, arXiv:1801.08748.

[Th] M. Thakur, *Albert algebras and the Tits-Weiss conjecture*, arXiv:1911.04976.

[W10] M. Wendt, *$\mathbb{A}^1$-homotopy of Chevalley groups*, J. K-Theory **5** (2010), 245–287.