

Отчет за 2019 год и отчет за период 2017-2019

Для конкурса Молодая Математика России.

Принятые к печати работы и препринты (2019)

1. G. Monakov, Tikhomirov S., A. Yakovlev On displacement of viscous liquid in a system of parallel tubes. Accepted by Computational Mathematics and Mathematical Physics.
2. F. Bakharev, L. Campoli, A. Enin, S. Matveenko, Yu. Petrova, S. Tikhomirov, A. Yakovlev. Numerical investigation of viscous fingering phenomenon for raw field data. Submitted to Transport in Porous Media.
3. А. Енин, П. Перстнева, С. Тихомиров. Периодические решения параболических уравнений с гистерезисом в размерности 1. Представлено в Записки научных семинаров ПОМИ.

Разрабатываемые курсы (2019)

1. Расширен курс “Эргодическая теория”, содержащий введение в предмет для студентов владеющих базовыми знаниями по динамическим системам.
2. Разработан курс “Введение в квантовые вычисления”.
3. Разработан курс “Стохастические динамические системы”.
4. Разработан курс “Неравномерно гиперболические динамические системы”.
5. Разрабатывается курс “Дифференциальные уравнения с запаздыванием”.

Научная деятельность

Общее описание

В течении 2019 года продолжалась работа по направлениям “Системы с гистерезисом” и “Свойство отслеживания”. Основная работа по этим направлениям велась совместно с соискателем Александром Ениным и студентами магистратуры Полиной Перстневой и Григорием Монаковым. В основном завершались работы, начатые в 2018 году.

Так же велись исследования по теме “вытеснение вязких жидкостей в пористых средах”, которая впервые появилась в 2018 году.

Вытеснение вязких жидкостей в пористых средах

Мы изучаем вытеснение вязких жидкостей менее вязкими в тонком слое пористой среды. Уравнения соответствующие этой задаче имеют чисто математический интерес. При этом мы имеем ввиду возможное приложение к нефтегазовой отрасли, а именно вытеснение нефти водой в тонком слое коллектора.

Хорошо известно, что задачи такого типа сильно неустойчивы. В частности может быть достаточно трудно исследовать корректность постановки подобного рода задач, например, недавние статьи [5, 6]. Менее вязкая жидкость формирует достаточно сложный узор, часто это явление называют эффектом Хеле-Шоу [7]. Отметим так же их связь с моделью Diffusion Limited Aggregation [8].

В этом проекте мы рассматриваем только те постановки, которые учитывают капиллярные силы. Для изучения этой задачи применяется два различных подхода: задача Маскета (Muskat) и постановка Баклея-Леверетта (Buckley-Leverett). Мы изучаем оба подхода. Отметим, что математически оба представляют собой параболические уравнения, дискретные или непрерывные.

Постановка Маскета основана на описании границы между двумя жидкостями. Отметим, что включение капиллярных сил в эту модель существенно использует кривизну свободной границы, см. например, классическую работу [9]. Такой подход не позволяет моделировать процессы в пористой среде, поскольку глобальная кривизна границы намного меньше локальной кривизне, возникающей в одной поре. В рамках этого подхода мы изучаем постановку типа Маскета в системе из большого числа трубок, формирующих граф, см. например, [11]. Мы начали с простой обратной задачи в системе параллельных трубок и сейчас изучаем движение на графах типа решетки.

Модель Баклея Леверетта [13] предполагает, что жидкости несмешиваемы, в то же время в каждой точке пространства обе жидкости представлены. Этот подход предполагается стандартом для нефтегазовой индустрии [12], в то же время она почти не исследована математически – в базе MathSciNet всего 50 работ с названием включающим модель Баклея-Леверетта. Мы исследуем устойчивые режимы вытеснения, концентрируясь на решениях типа бегущая волна, тем не менее учитывая неоднородность сред и возможную нестационарность закачки. Мы начинаем с одномерной постановке, в первом приближении описывающей процессы вытеснения при эксплуатации горизонтальными скважинами.

Задача-мечта и глобальная цель проекта – показать, что модель Баклея-Леверетта может быть получена из постановки типа Маскета на графе при помощи предельного перехода. Ниже описан текущий прогресс по этому проекту.

Возникновение вязких пальцев при вытеснении в пористой среде с капиллярными силами

В общем виде уравнения, описывающие двухфазное несмешивающееся течение в пористых средах, задаются уравнениями закона сохранения массы и законом Дарси для

каждой из жидких фаз.

$$\frac{\partial(\phi S_\alpha \rho_\alpha)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_\alpha \mathbf{q}_\alpha) = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{q}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha} \mathbf{K}}{\mu_\alpha} (\nabla p_\alpha - \rho_\alpha g \nabla z), \quad (2)$$

где $\alpha = w$ обозначает смачиваемую фазу (например, воду), $\alpha = n$ обозначает несмачиваемую фазу (например, масло), ρ_α , S_α , p_α , bfq_α , $k_{r\alpha}$ и μ_α – это соответственно плотность, насыщенность, давление, линейная скорость, относительная проницаемость и вязкость α -фазы, ϕ – пористость среды, \mathbf{K} – тензор абсолютной проницаемости, g – гравитационное ускорение, а z – глубина: $\nabla z = (0, 0, 1)$. Кроме того выполнено следующее свойство

$$S_w + S_n = 1. \quad (3)$$

Функция капиллярного давления определяется следующим образом

$$p_c(S_w) = p_n(S_w) - p_w(S_w) = \sigma \sqrt{\frac{\phi}{k}} J(S_w). \quad (4)$$

Здесь σ – межфазное натяжение, J – функция Леверетта [13]. Мы рассматриваем систему (1) – (4) в двумерной области $(x, y) \in [0, L] \times [-W/2, W/2]$ пренебрегаем гравитацией и предполагаем, что жидкости несжимаемы. При таких предположениях уравнения (1) – (2) принимают вид

$$\phi \frac{\partial S_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}_\alpha = 0, \quad (5)$$

$$\mathbf{q}_\alpha = -\frac{k_{r\alpha} \mathbf{K}}{\mu_\alpha} \nabla p_\alpha. \quad (6)$$

Эти уравнения дополняются соответствующими начальными и граничными условиями.

Основные уравнения (3) – (6) образуют систему связанных нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, которые можно математически преобразовать в несколько альтернативных форм. Мы используем классический подход [12], где насыщение фазы смачивания и “приведенное давление” (определенное в (7)) выбраны в качестве независимых переменных. В этом случае основное уравнение для насыщения является параболическим (в случае ненулевого капиллярного давления), а уравнение для давления является эллиптическим.

Введем следующие обозначения

$$\lambda_\alpha = \frac{k_{r\alpha}}{\mu_\alpha}, \quad \alpha = w, n, \quad \lambda = \lambda_w + \lambda_n,$$

и функцию Баклея-Леверетта

$$f_\alpha = \frac{\lambda_\alpha}{\lambda}, \quad \alpha = w, n.$$

Введем общую скорость $\mathbf{q} = \mathbf{q}_w + \mathbf{q}_n$, тогда $\text{div} \mathbf{q} = 0$ и $\mathbf{q} = -\mathbf{K} \lambda \nabla p$. Здесь p это “приведенное давление” определенное как

$$p = p_w \lambda_w + p_n \lambda_n - \int_{S_w}^1 p_c(\tau) \lambda_w(\tau) d\tau. \quad (7)$$

Используя стандартные аргументы (см., например, [12]), уравнение для водонасыщенности S_w можно записать следующим образом

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -\text{div}(\mathbf{f}_w \mathbf{q}) - \text{div}\left(\frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda} \mathbf{K} \nabla p_c\right).$$

Наконец мы рассматриваем следующую систему уравнений

$$\text{div}(\mathbf{K} \lambda \nabla p) = 0, \quad (8)$$

$$\phi \frac{\partial S_w}{\partial t} = -f'_w(S_w) \nabla S_w \cdot \mathbf{q} - \text{div}\left(\frac{\lambda_w \lambda_n}{\lambda} \mathbf{K} p'_c \nabla S_w\right). \quad (9)$$

Первый член в правой части (9) отвечает за перенос из-за вязких сил, а второй - за диффузию вызванную капиллярным давлением.

Стоит отметить, что несмотря на известность и важность вопроса, по этой задаче получено чрезвычайно мало математических результатов. И даже формулировка вопроса о вязких пальцах не является точной.

Мы предложили классификацию возможных вязких пальцев и показали некоторые механизмы влияющие на их возникновение. Предложенная классификации подтверждена двумя численными моделированиями основанными на методах конечных элементов и методе конечных объемов.

Если мы рассмотрим одномерный случай без капиллярного слагаемого, то получим так называемое уравнение Бакли - Леверетта [13, 12]. Если функция дробного потока $f_w = \frac{\lambda_w}{\lambda}$ (также называемая функцией Баклея-Леверетта) является гладкой и S -образной, то профиль насыщения показывает фронт удара, за которым следует волна разрежения. Во время смещения есть две разные зоны: нефтеносная зона и зона проникновения воды, лежащая позади фронта удара. В нефтяной зоне вода имеет остаточную насыщенность S_{rw} (самая низкая водонасыщенность, которая может быть достигнута процессом вытеснения). На рис. 1 показана функция Баклея-Леверетта и профиль насыщения фазы смачивания для активной зоны А Ударная насыщенность S_{shock} является решением следующего уравнения

$$f'_w(S_{shock}) = \frac{f_w(S_{shock}) - f_w(S_{rw})}{S_{shock} - S_{rw}}. \quad (10)$$

В литературе основным фактором, описывающим рост неустойчивости в двухфазном потоке, является коэффициент отношения подвижностей. Для ячейки Хеле-Шоу

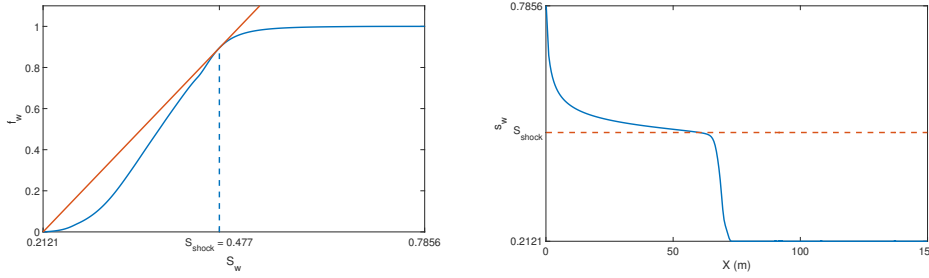


Рис. 1:: Buckley-Leverett function and wetting phase saturation profile for Core A.

она обычно принимается как отношение вязкостей $M = \frac{\mu_n}{\mu_w}$. Согласно [16, 17, 18] если $M \leq 1$, то смещение стабильно. Для течений в пористых средах также необходимо учитывать функции относительной проницаемости. Различные авторы предложили различные формулы для коэффициента мобильности, см. [18] для сравнения различных коэффициентов мобильности, когда функции относительной проницаемости имеют тип Кори. Следуя [16], мы рассматриваем так называемый коэффициент подвижности ударного фронта как

$$M_{shock} = \frac{\lambda(S_{shock})}{\lambda(S_{rw})}, \quad (11)$$

это отношение подвижности смеси нефти и воды при насыщении шока S_{shock} и подвижности нефтяной зоны. Из анализа линейной устойчивости в [16] следует, что если $M_{shock} \leq 1$, смещение стабильно. Если $M_{shock} > 1$, то устойчивость зависит от баланса вязких и капиллярных сил, который можно описать так называемым капиллярным числом. Для различных выражений капиллярного числа. Мы приняли простейшее капиллярное число

$$N_{ca} = \frac{\sigma}{\mu_2 q} \quad (12)$$

где q - усредненная скорость потока фронта, а σ - межфазное натяжение. Чем больше N_{ca} , тем стабильнее смещение.

Вытеснение жидкостей в системе трубок

Мы завершили работу над статьей [14], в которой рассматривали точно решаемую квазиодномерную задачу вытеснения вязкой жидкости в системе из параллельных трубок.

В этой модели среда представлена множеством пересекających трубок отличающихся длиной и толщиной. Для бесконечного количества трубок мы описываем их при помощи меры. Левый конец всех трубок соответствует нагнетательной скважине, правый конец добывающей (see fig. 2). В каждой трубке пространство разделено на 2 части, в которой находится одна из фаз (вода или нефть).

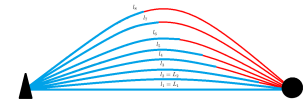


Рис. 2:: Модель, описанная в [14]

В [14] мы изучили обратную задачу — по данным добычи (называемой характеристикой вытеснения), найти геометрию резервуара, т.е. найти длины и толщины трубок. Мы доказали единственность и устойчивость задачи в некоторых функциональных пространствах. Так же мы провели численное моделирование, которое показало, что задача устойчива при малых погрешностях приборов, однако при реалистичных значениях погрешностей и большом отношении вязкостей задача неустойчива.

Мы рассматривали обобщение данной постановки, когда трубки объединены в граф. Нами было предложено несколько строгих математических формулировок, но задача оказалась чрезвычайно сложной и содержательного математического прогресса в ней добиться не удалось.

Системы с гистерезисом

Продолжаются исследования начатые в [2]. Исследования ведутся под моим руководством студенткой 4-го курса бакалавриата “Математика” Полиной Перстневой. Краткое описание повторяет отчет 2017 года. В конце приведены результаты полученные за 2018 год.

Рассмотрим задачу термоконтроля: пусть Ω область в \mathbb{R}^n с гладкой границей, $u : \Omega \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ — температура в области. Предположим, что на границе области расположен охлаждающий-нагревающий прибор. При этом контроль происходит посредством условия Неймана, и решение в выборе режима нагрев или охлаждение происходит посредством оператора гистерезиса типа неидеальное реле. Подобная система задается уравнениями

$$u_t = \Delta u, \quad x \in \Omega \quad (13)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = K(x)\mathcal{H}(\hat{u}(\cdot))(t), \quad x \in \partial\Omega \quad (14)$$

дополненная начальными данными. В этой системе $K(x)$ соответствует интенсивности нагревания, \hat{u} — средняя температура в области, задаваемая линейным оператором (в дальнейшем мы рассмотрим конкретные примеры и не будем сейчас концентрироваться на строгости общей постановки). \mathcal{H} — оператор гистерезиса типа неидеальное реле: для вещественно-значной функции $\hat{u}(t)$ оператор задается следующим образом, Рис. 3. Зафиксируем два пороговых значения $\alpha < \beta$ и два выхода $h_1 \neq h_{-1}$. Если $u(t) \leq \alpha$, то $\mathcal{H}(u)(t) = h_1$; если $u(t) \geq \beta$, то $\mathcal{H}(u)(t) = h_{-1}$; если $u(t)$ лежит между α и β , тогда $\mathcal{H}(u)(t)$ не меняет своего значения.

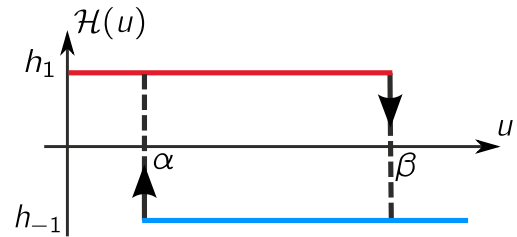


Рис. 3.: Hysteresis \mathcal{H}

Основной задачей является описание поведение решения при $t \rightarrow +\infty$ и поиском его устойчивых режимов. Наиболее естественным является вопрос — верно ли, что решение сходится к периодической по t функции. В работе [2] было продемонстрировано, что это

не всегда так. Более того, неизвестно всегда ли существует хотя бы одно периодическое решение у системы.

Совместно с П. Перстневой и А. Ениным мы занимаемся изучением вопроса существования и устойчивости периодических решений в случае одномерного пространства. В таком случае $K(x)$ задается двумя числами, поскольку граница $\partial\Omega$ состоит из двух точек. Благодаря одномерности области $\partial\Omega$ так же удастся расписать уравнения (13) в виде системы линейных уравнений

$$\dot{u}_n = -n^2 u + kH(\hat{u}(\cdot))(t), \quad n > 0.$$

Несмотря на кажущуюся простоту, уравнения связаны посредством оператора гистерезиса, что превращает задачу в нелинейную.

На конец 2017 года для некоторых частных случаев удалось доказать существование периодического решения, вопросы устойчивости были открыты.

В течении 2018 года задача в одномерном случае была сведена к случаю односточечных измерений: $\hat{u} = u(x_0)$ для некоторой точки x_0 . Для трех специальных точек x_0 были показаны существование и единственность унимодальных периодически решений, доказана их асимптотическая устойчивость. Результаты представлены в виде постерного доклада на международной конференции “Real and Complex Dynamical Systems”.

В течении 2019 года показано, что существование и устойчивость периодических точек выдерживает малое изменение меры. Тем самым показано, что для наиболее важного для приложений случай – носитель меры сосредоточен в окрестности концов интервала унимодальное периодическое решение существует, единственно и асимптотически устойчиво. Подготовлен текст статьи [19], статья подана в журнал Записки Научных семинаров ПОМИ.

Отслеживание в неравномерно гиперболических системах

Рассмотрим динамическую систему порожденную отображением

$$f : M \rightarrow M$$

многообразия в себя. При фиксированном $d > 0$ назовем d -псевдотраекторией последовательность $\{y_k\}$, удовлетворяющую неравенствам

$$|y_{n+1} - f(y_n)| < d, \quad n \in [0, N].$$

Основным вопросом для нас является при каких условиях найдется точная траектория $\{x_n\}$, что выполнены неравенства

$$|x_n - y_n| < \varepsilon.$$

Т.е. рядом с приближенной траекторией найдется точная траектория. Эта задача называется “задачей об отследивании” и позволяет ответить на такие важные прикладные

вопросы как влияние шума и ошибок округления при численном моделировании на свойства системы.

В [3] было продемонстрировано, что для систем не являющихся гиперболическими нельзя рассчитывать на свойство отслеживания для достаточно длинных псевдотраекторий.

В совместной работе с Г. Монаковым мы смогли ослабить понятие гиперболичности и доказать положительный результат следующего вида. При достаточно жестких ограничениях на α и β (например возможны только $\beta < 1/20$) конечная d -псевдотраектория длины $1/d^\beta$ может быть $\varepsilon = d^\alpha$ отслежена.

Так же в совместной работе с Г. Монаковым рассматривались неравномерно гиперболические линейные косые произведения над сдвигом Бернулли.

Пусть $\Sigma = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ с топологией Тихонова и $\sigma : \Sigma \rightarrow \Sigma$ сдвиг Бернулли. Пусть $\lambda \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ непрерывная функция. Рассмотрим отображение

$$f : \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \Sigma \times \mathbb{R}.$$

Если выполнено условие

$$\int_{\Sigma} \log \lambda d\mu \neq 0, \tag{15}$$

то отображение f является хорошим модельным примером неравномерно гиперболического отображения.

В этом случае удалось доказать что при некоторых α и β конечная d -псевдотраектория длины $1/d^\beta$ может быть $\varepsilon = d^\alpha$ отслежена. При этом величина $\alpha + \beta$ во многом определяется величиной выражения (15).

Сравнение запланированных и полученных результатов

Научные результаты

Планировалось, что работы будут вестись в трех направлениях: системы с гистерезисом, свойство отслеживания, бегущие волны.

По направлению “системы с гистерезисом” была опубликована сама сильная работа автора за время гранта [1], при этом следует признать, что полученные результаты несколько слабее ожидавшихся автором. Видимо из-за недооцененности сложности задачи.

По направлению “свойство отслеживания” совместно с Григорием Монаковым были получены результаты сопоставимые с заявленными, хотя и не совпадающие с ними. В части отслеживания в косых произведениях удалось получить результаты сильнее ожидаемых, для дифференцируемых отображений слабее.

Направление “бегущие волны” было полностью заменено направление гидродинамика в пористых средах. В этом направлении изучалось три вида подзадач – движение

жидкостей в графах их трубок; неустойчивость фронта вытеснения и вязкие пальцы; устойчивость бегущих волн в одномерных задачах. Для автора это была совершенно новая тема и за 3 года удалось достаточно глубоко в нее погрузиться.

Наверно, главным результатом является создание единой рабочей группы из 5-7 человек совместно решающей задачи и запуск нового научного семинара в рамках факультета математики и компьютерных наук.

За время действия гранта были опубликованы и подготовлены к печати работы

- Fisher, T.; Petty, T.; Tikhomirov, S. Nonlocally maximal and premaximal hyperbolic sets. *Modern theory of dynamical systems*, 83–99, *Contemp. Math.*, 692, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.
- Gurevich, Pavel; Tikhomirov, Sergey Rattling in spatially discrete diffusion equations with hysteresis. *Multiscale Model. Simul.* 15 (2017), no. 3, 1176–1197.
- Scheel, Arnd; Tikhomirov, Sergey Depinning asymptotics in ergodic media. *Patterns of dynamics*, 88–108, *Springer Proc. Math. Stat.*, 205, Springer, Cham, 2017.
- Gurevich, Pavel; Tikhomirov, Sergey Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 35 (2018), no. 4, 1041–1077.
- Monakov G.V., Tikhomirov S.B., Yakovlev A.A., On displacement of viscous liquid in a system of parallel tubes.
- F. Bakharev, L. Campoli, A. Enin, S. Matveenko, Yu. Petrova, S. Tikhomirov, A. Yakovlev. Numerical investigation of viscous fingering phenomenon for raw field data. Submitted to *Transport in Porous Media*.
- А. Енин, П. Перстнева, С. Тихомиров. Периодические решения параболических уравнений с гистерезисом в размерности 1. Представлено в *Записки научных семинаров ПОМИ*.

Преподавательская деятельность

Были разработаны сверхпопулярные у студентов курсы “Введение в квантовые вычисления” и “Введение в эргодическую теорию”. Так же разработано множество просто успешных у студентов курсов “дифференциальные уравнения с гистерезисом”, “стохастические динамические системы”, “неравномерно гиперболические системы”, “дифференциальные уравнения с запаздыванием”.

Список литературы

- [1] Gurevich, Pavel; Tikhomirov, Sergey Spatially discrete reaction-diffusion equations with discontinuous hysteresis. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 35 (2018), no. 4, 1041–1077.

- [2] Gurevich, Pavel; Tikhomirov, Sergey. Symmetric periodic solutions of parabolic problems with discontinuous hysteresis. *J. Dynam. Differential Equations* 23 (2011), no. 4, 923–960.
- [3] Tikhomirov, Sergey. Holder shadowing on finite intervals. *Ergodic Theory Dynam. Systems* 35 (2015), no. 6, 2000–2016.
- [4] Felix Otto, Viscous fingering : an optimal bound on the growth rate of the mixing zone. *SIAM journal on applied mathematics*, 57 (1997) 4, p. 982-990.
- [5] Constantin, Peter; Gancedo, Francisco; Shvydkoy, Roman; Vicol, Vlad Global regularity for 2D Muskat equations with finite slope. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 34 (2017), no. 4, 1041–1074
- [6] Constantin, Peter; Córdoba, Diego; Gancedo, Francisco; Rodríguez-Piazza, Luis; Strain, Robert M. On the Muskat problem: global in time results in 2D and 3D. *Amer. J. Math.* 138 (2016), no. 6, 1455–1494.
- [7] Park, C., Gorell, S. Homsy G. 1984,“Two-phase displacement in Hele-Shaw cells: Experiments on viscously driven instabilities”, *Journal of Fluid Mechanics*, vol. 141, pp. 275–287.
- [8] T. C. Hasley, Diffusion-Limited Aggregation: A Model for Pattern Formation, *Physics Today* 53, 11, 36 (2000).
- [9] Paterson, L. (1981). Radial fingering in a Hele Shaw cell. *Journal of Fluid Mechanics*, 113, pp. 513-529.
- [10] Maini, B.B., Nicola, F., Goldman, J. and Sarma, H.K., 1990. Measurements and Estimation of Three-Phase Relative Permeability. Petroleum Recovery Institute, Calgary, Canada.
- [11] Akhil Datta-Gupta, M. J. King, *Streamline Simulation: Theory and Practice*. Society of Petroleum Engineers, 2007.
- [12] Barenblatt, G.I., Entov, V.M., and Ryzhik, V.M., *Theory of Fluid Flows through Natural Rocks*, London: Kluwer, 2010.
- [13] Buckley, S., Leverett, M.: Mechanism of fluid displacement in sands. *Trans. AIME Soc. Pet. Eng.* 146, 107–116 (1942)
- [14] Monakov G.V., Tikhomirov S.B., Yakovlev A.A., On displacement of viscous liquid in a system of parallel tubes. Preprint.
- [15] Sahimi, M., 2011. *Flow and transport in porous media and fractured rock: from classical methods to modern approaches*. John Wiley & Sons.

- [16] J. Hagoort, et al., Society of Petroleum Engineers Journal14(01), 63 (1974)
- [17] S. Berg, S. Oedai, H. Ott, International Journal of Greenhouse Gas Control12, 478 (2013)
- [18] H. Ott, S. Berg, Energy Procedia37, 4568 (2013)
- [19] А. Енин, П. Перстнева, С. Тихомиров. Периодические решения параболических уравнений с гистерезисом в размерности 1. Представлено в Записки научных семинаров ПОМИ.