Отчёт о научной и педагогической работе за второй год гранта “Молодая математика России-2017”.

Никита Калинин

Санкт-Петербург, 22 декабря 2019 г.

1 Наука

За 2019-ый год опубликована работа [4] – по теме гранта. Дописана, отправлена в физический журнал и уже отвергнута статья [2], про пески. Отправлена, и повторно отправлена в социологический журнал после получения рецензии статья о применении теории игр к изучению списывания (своеобразная попытка популяризовать теорию игр среди социологов с одной стороны, а с другой – покритиковать имеющееся отношение к списыванию в академических кругах). Статья про аукционы [1] была отправлена и были получены рецензии, что это очевидное переоткрытие велосипеда.

Гипотеза из предыдущего отчёта

Гипотеза: каждое компактное выпуклое тело в $\mathbb{R}^3$ приближается “изнутри” унимодулярными многогранниками, то есть многогранниками, у которых примитивные нормальные вектора к граням, сходящимся в каждой вершине, образуют базис в $\mathbb{Z}^3$. – очевидна. Если грани, сходящиеся в вершине многогранника, ортогональны векторам из $\mathbb{Z}^n$, то всегда можно срезать вершину несколькими дополнительными плоскостями, чтобы получилось несколько унимодулярных вершин: на алгебро-геометрическом языке это называется торическим разрешением особенностей.

Другая гипотеза, состоящая в том, что приближающие унимодулярные многогранники можно выбрать так, чтобы их грани были опорными плоскостями к исходному компактному телу, кажется неверной, но доказать существование контрпримера пока не получается.

1.1 Полученные формулы

Пользуясь обобщённым методом Архимеда, см. [3], для кривой $(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha, \sin\alpha+(\pi-\alpha)\cos\alpha)$ получаем сумму по матрицам $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ из $SL(2,\mathbb{Z})$ с положительными элементами.

$$\sum \left[(a+b)\sin\frac{\pi b}{a+b}+(c+d)\sin\frac{\pi d}{c+d}-(a+b+c+d)\sin\frac{\pi(b+d)}{a+b+c+d}\right]^2=\pi^2/2.$$

Та же сумма без квадратов даёт 2π.

1.2 Связь с теорией чисел

На конференции в Обервольфахе, Миша Школьников открыл Snapshots – сборник, куда пишут популярные статьи участники конференции, и обнаружил там одну из наших формул: *Special values of zeta functions and areas of triangles*, Kramer, von Pippich, *Snapshots of modern mathematics* No10/2015 from Oberwolfach, [5].

Разумеется, оказалось, что идею получать площадь как сумму площадей маленьких треугольников уже придумывали ранее – так появились ряды Торнхайма (или Торнхайма-Морделла), который изучал суммы слагаемых вида $\frac{1}{bd(b+d)}$, самая простая из которых получается как сумма площадей треугольников с вершинами в центрах окружностей из замощения Форда. Таким образом, наш метод является обобщением метода Торнхайма. Следует отметить, что у Форда и Торнхайма вершины треугольников лежат в центра окружностей, поэтому картинка двойственна нашей (в неизвестном смысле).

1.3 Сходимость рядов

Сразу после публикации [4] Федя Петров обратил моё внимание, что сходимость можно улучшить и полностью изучить: ряд сходится при $s > 2/3$ и расходится при $s \leq 2/3$.

Когда на докладе в ФизТехе я сформулировал гипотезу, что это так для любой выпуклой области (потому что так для рядов Торнхайма, которые получаются по параболе), Федя немедленно сказал, почему так может быть: похожие суммы площадей в степенях $1/3$ стремятся к аффинной длине кривой (интеграл от кубического корня Гауссовой кривизны), которая в свою очередь появляется при подсчёте числа многозвенных выпуклых ломанных, с вершинами в целых точках, лежащих около данной кривой, и вообще связаны с подсчётом целых точек около данных кривых.

Как устроено доказательство сходимости при $s > 2/3$ для произвольных кривых, в принципе, понятно: локально все такие суммы устроены одинаково, поэтому достаточно написать оценки в терминах первых двух производных кривой. Поэтому достаточно доказать для какой-нибудь кривой (а для окружности и параболы уже доказано). Интересен вычет получающихся рядов при $s = 2/3$ (если он есть, то это будет аффинный инвариант кривой) и пока нет никаких идей, как это увидеть.

2 Связь с когомологиями $SL(2,\mathbb{Z})$

Григорий Мерзон посоветовал мне почитать статьи дона Загира [7, 6] – выглядит крайне интересно и похоже, но понять связь покуда не получилось.

3 Преподавание

Это последний год я преподавал у социологов в ВШЭ, написана книга-конспект по математике

`http://mathcenter.spb.ru/nikaan/teach/socmathbook.pdf`

Осмысленность этого, видимо, невелика, и никому этот конспект не пригодится. По итогам преподавания написана статья *Как преподавать математику социологам?*, которая будет опубликована в журнале *Математическое просвещение*.

Я являюсь руководителем дипломов у двух студентов-бакалавров во ВШЭ – по темам “Крабовые аукционы” и “Аукционы в охранном бизнесе”.

На новом месту работы – факультет МКН в СПбГУ – я преподавал семестровый спецкурс по теории игр и семестровый спецкурс по теории гомологий, а также вёл семинары по общей топологии. Кроме того, в СПбГУ у меня есть два студента, пишущих дипломы – по теории игр и по лагранжевым подмногообразиям, соответственно.

Ещё в этом году я снова организовал олимпиаду по топологии.

`http://mathcenter.spb.ru/nikaan/olympiad.html`

Была опубликована заметка о олимпиаде по топологии в *Математическом просвещении.*

Доклады на конференциях.

26.11.2019 MIPT COMBINATORICS AND GEOMETRY DAYS Доклад про число пи.

`http://combgeo.org/en/events/combinatorics-and-geometry-days-at-mipt-i/#location`

18-19.11.2019 Miami conference

`https://www.imsa.miami.edu/events/fall-2019-emphasis-semester/main-workshops/index.html`

Доклад посредством скайпа и расшаривания экрана на iPad, на котором показываются слайды и поверх пишется ручкой.

9.10.2019 Gokova Eudoksos conference, доклад по теоретико-числовые аспекты песочных моделей.

2.07.2019 "New mechanism for infinite repeated posted price auction without discounting", Turku, Finland,

`https://sing15.fi/wp-content/uploads/2019/07/bookofabstracts.pdf`

Список литературы

[1] N. Kalinin. New mechanism for repeated posted price auction with a strategic buyer without discounting.

[2] N. Kalinin and Y. Prieto. Statistics for tropical sandpile model. *https://arxiv.org/abs/1906.02802*.

[3] N. Kalinin and M. Shkolnikov. The number π and a summation by $SL(2,\mathbb{Z})$. *Arnold Mathematical Journal*, 3(4):511–517, 2017.

[4] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical formulae for summation over a part of $SL(2,\mathbb{Z})$. *European Journal of Mathematics*, 5(3):909–928, 2019.

[5] J. Kramer and A. Pippich. Snapshots of modern mathematics from oberwolfach: special values of zeta functions and areas of triangles. *Notices of the AMS*, 63(8), 2015.

[6] D. Zagier. Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics Paris, July 6–10, 1992*, pages 497–512. Springer, 1994.

[7] D. Zagier. Quelques conséquences surprenantes de la cohomologie de sl (2, z). *Leçons de Mathématiques d'aujourd'hui, Cassini, Paris*, pages 99–123, 2000.