

# Финальный отчёт о научной и педагогической работе за грант “Молодая математика России-2017”.

Никита Калинин

Санкт-Петербург, 14 декабря 2020 г.

## 1 Публикации за 2018-2020, где указана поддержка гранта

Tropical formulae for summation over a part of  $SL(2, \mathbb{Z})$ , [6]  
Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions, [7]  
Introduction to tropical series and wave dynamic on them [5]  
Pattern formation and tropical geometry, [3]  
Legendrian curves in  $\mathbb{C}P^3$ : cubics and curves on a quadratic surface [2]  
Strategic analysis of the Russian crab quota auction in 2019 [8]

Собственно результаты по этому гранту частично вошли только в первую указанную публикацию. Остальные публикации по другим темам. Что удалось получить в рамках этого гранта ещё не записано в структурированном виде.

## 2 Научные достижения (в этом году и вообще)

В целом, направления, намеченные в заявке, оказались тупиковыми. Что получилось – это связать скорость сходимости рядов с эквиаффинной геометрией (в этом году). Напомню контекст.

Теорема. ([4]) Пусть  $f(a, b, c, d) = \sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} - \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$  и  $(a, b, c, d)$  пробегает все четвёрки неотрицательных целых чисел таких что  $ad - bc = 1$ . Определим

$$F(s) = \sum_{(a,b,c,d)} f(a, b, c, d)^s \quad (1)$$

Тогда  $F(2) = 2 - \pi/2$ .

Более того,  $F(s)$  сходится при  $s > 2/3$  и расходится при  $s \leq 2/3$ .

Вычисление  $F(1)$  (соответственно  $F(2)$ ) чисто геометрически заключается в суммировании значений (квадратов значений) кусочно-линейной функции (как слева на картинке 1) в её вершинах (то есть в вершинах графа на картинке справа).

Вышеуказанная функция получается, если рассмотреть единичный круг  $\Omega$  в качестве исходной фигуры, это даёт функцию  $F(s) = F_{\Omega}^s$ . Для параболы получается следующий ряд

$$F(s) = \sum_{(p,q)=1} \frac{1}{p^s q^s (p+q)^s},$$

который, как известно, сходится при  $s > 2/3$ .

Федя Петров обратил моё внимание на то, что константа  $2/3$  возникает и при подсчёте аффинной длины кривой. А именно: отметим на кривой последовательность точек  $A_1, A_2, \dots, A_n$ ,

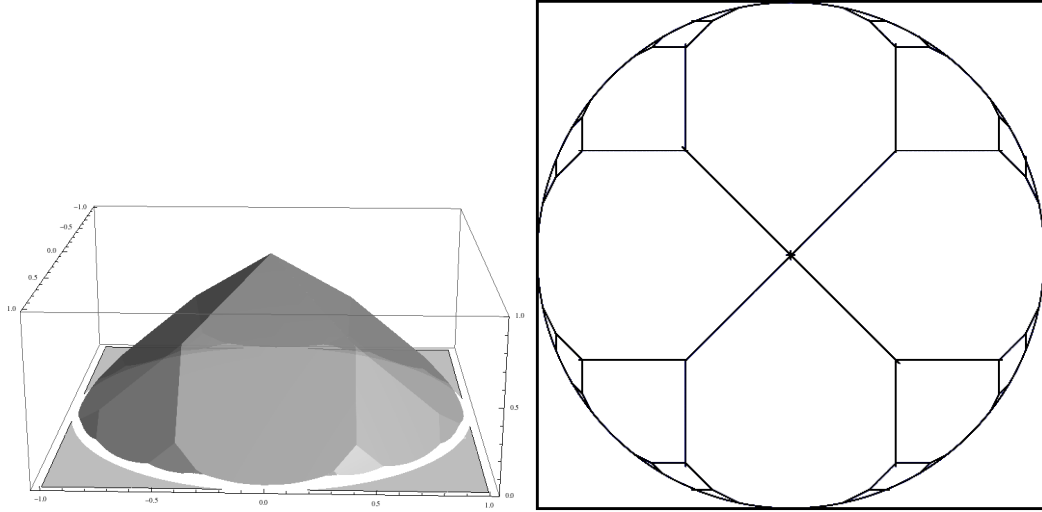


Рис. 1: Кусочно-линейная функция  $F_\Omega$  для  $\Omega$  являющейся единичной окружностью, и множество её негладкости (справа).

проведём касательную  $l_i$  к кривой в каждой точке  $A_i$  и посчитаем площади  $S_i$  треугольников  $A_i A_{i+1} B_i$ , где  $B_i$  – пересечение  $l_i, l_{i+1}$ .

Тогда, если максимальное расстояние между парами соседних точек стремится к нулю, то  $\sum S_i^{1/3}$  стремится к аффинной длине кривой – которую можно определить и как  $\int \kappa^{1/3}$  (интеграл от кубического корня из кривизны, посчитанный для натуральной параметризации). Если в определении через площади треугольников поверить в существование предела, то ясно, что рекомый предел не меняется при аффинных преобразованиях, сохраняющих площадь.

Таким образом можно доказать, что для любой компактной строго выпуклой фигуры (не обязательно окружности или параболы)  $\Omega$  ряд  $F_\Omega(s)$  начинает расходиться при  $s = 2/3$ , через оценку на аффинную кривизну кривой (как и в евклидовой геометрии, можно зажимать кривую около точки  $x$  между двумя окружностями  $O_1, O_2$ , касающимися кривую в  $x$ , и имеющими радиус кривизны больше ( $O_1$ ) и меньше ( $O_2$ ) чем радиус кривизны в точке  $x$ .) Роль окружностей (кривые постоянной кривизны) в аффинной геометрии играют эллипсы и параболы (для которых мы уже знаем оценки на сходимости из прямых вычислений).

Вычет  $\alpha$ , т.е.  $F(s \rightarrow 2/3) \sim \alpha \cdot \frac{1}{s-2/3}$  ещё предстоит определить, вероятно он равен полной аффинной кривизне кривой. Сумма оценивается через интеграл от следующей функции  $f$ : для произвольной точки  $x$  проведём из неё касательные к нашей кривой и посчитаем площадь между кривой и касательными. Это и будет значением  $f(x)$ . Далее, около произвольной точки на кривой, сумма ряда  $F(s)$  около этой точки оценивается с обеих стороны через интеграл от  $f(x)^{s/2}$  с константами, зависящими от аффинной кривизны в окрестности этой точки.

**Ещё формулы.** Для кривой  $e^{-x} + e^{-y} = 1$  получаем.

$$\frac{1}{2} \sum \left( a \ln \left( 1 + \frac{1}{(a+b)(a+c)} \right) + b \ln \left( 1 + \frac{1}{(b+a)(b+d)} \right) + c \ln \left( 1 + \frac{1}{(c+a)(c+d)} \right) + d \ln \left( 1 + \frac{1}{(d+b)(d+c)} \right) \right)^2 = \zeta(2) = \pi^2/6$$

**Достижения прошлых лет.** На конференции в Обервольфахе, Миша Школьников открыл Snapshots – сборник, куда пишут популярные статьи участники конференции, и обнаружил там одну из наших формул: *Special values of zeta functions and areas of triangles*, Kramer, von Pippich, *Snapshots of modern mathematics* No10/2015 from Oberwolfach, [9].

Разумеется, оказалось, что идею получать площадь как сумму площадей маленьких треугольников уже придумывали ранее – так появились ряды Торнхайма (или Торнхайма-Морделла), который изучал суммы слагаемых вида  $\frac{1}{bd(b+d)}$ , самая простая из которых получается как сумма площадей треугольников с вершинами в центрах окружностей из замощения Форда. Таким образом, наш метод является обобщением метода Торнхайма. Следует отметить, что у Форда и Торнхайма вершины треугольников лежат в центрах окружностей, поэтому картинка двойственна нашей (в неизвестном смысле).  $\zeta$ -функция Торнхайма появляется в вычислении объёма некоторого пространства модулей [1], причём геометрический смысл тот же самый – пространство получается бесконечной серией раздутий, и потом объём считается через площадь отрезаемых при раздутии треугольников. Интересно было бы получить такие формулы для трёхмерных пространств модулей, но пока это не кажется возможным.

Попытки обобщить формулу Эйлера-Маклорена с прямой на трёхвалентные графы или замощения плоскости треугольниками не привели к успеху. Оценить асимптотику сумм через суммирование по орбите  $SL(2, \mathbb{Z})$  на верхней полуплоскости не получилось.

Многомерные обобщения формул не получились, судя по всему их и нет – кажется, невозможно отрезать только тетраэдры с помощью касательных плоскостей, чтобы получить выпуклое тело в  $\mathbb{R}^3$  иногда надо отрезать призмы, либо отказаться от унимодулярности тетраэдров.

Были получены формулы:

**Для треугольника с иррациональной стороной:**

$$\alpha = [\alpha] + \sum_{p_n, q_n} (p_n - \alpha q_n)^2 r_n,$$

$$\alpha + 1 = [\alpha] + \sum_{p_n, q_n} (p_n - \alpha q_n) r_n,$$

где  $r_0, r_1, \dots$  коэффициенты непрерывной дроби  $\alpha$  и  $\frac{p_n}{q_n}$  это  $n$ -ая подходящая дробь к  $\alpha$

$$r_0 = [\alpha] = \frac{p_0}{q_0}, r_1 = \left[ \frac{1}{\alpha - r_0} \right], \frac{p_1}{q_1} = r_0 + \frac{1}{r_1}, \text{ etc.}$$

**Для диска в  $L^\mu$ -норме:**

Рассмотрим область  $\Omega_\mu \subset \mathbb{R}^2$  заданную как  $|x|^\mu + |y|^\mu \leq 1$ , для  $\mu > 1$ . Показано что четверть площади  $\Omega_\mu$  равно

$$\frac{\Gamma^2(2 - \nu^{-1})}{\Gamma(3 - 2\nu^{-1})} = 1 - \frac{1}{2} \sum (|v_1|_\nu + |v_2|_\nu - |v_1 + v_2|_\nu)^2,$$

где  $|\cdot|_\nu$  обозначает двойственную норму, т.е.  $\mu^{-1} + \nu^{-1} = 1$ , и суммирование происходит по  $(v_1 v_2) \in SL^+(2, \mathbb{Z})$ , как и в вышеописанных формулах.

Для кривой  $(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha, \sin \alpha + (\pi - \alpha) \cos \alpha)$  получаем сумму по матрицам  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  из  $SL(2, \mathbb{Z})$  с положительными элементами.

$$\sum \left[ (a+b) \sin \frac{\pi b}{a+b} + (c+d) \sin \frac{\pi d}{c+d} - (a+b+c+d) \sin \frac{\pi(b+d)}{a+b+c+d} \right]^2 = \pi^2/2.$$

Та же сумма без квадратов даёт  $2\pi$ .

### 3 Преподавание и научное руководство

На факультете МКН СПбГУ весной 2020 я вёл практику по геометрии и топологии и вёл семинар по аукционам. Осенью я вёл практику по геометрии и топологии, читал спецкурс по теории

гомологий и спецкурс по симплектической геометрии. Осенью во ВШЭ СПб я читал курс по топологическому анализу данных для программистов.

В 2020 году во ВШЭ у меня один студент защитил бакалаврскую работу по крабовым аукционам, и одна студентка не защитилась, в этом году пишет диплом по применению топологического анализа данных в политологии. В настоящий момент в СПбГУ я руковожу двумя дипломами (магистерским и бакалаврским) и 5 курсовыми на разные темы.

## 4 Доклады на конференциях в 2020.

11-13 сентября 2020, "Sandpile pattern" HSE, Autumn online school "Applications of topology and geometry".

14 июля 2020 "Linear patterns in sandpile model on a plane", Leipzig, zoom conference.

13-16 апреля 2020 МИРТ, zoom conference, Combinatorics and geometry days, 2.

## Список литературы

- [1] J. Burgos, U. Kühn, and J. Kramer. The singularities of the invariant metric on the line bundle of jacobi forms. *arXiv preprint arXiv:1405.3075*, 2014.
- [2] N. Kalinin. Legendrian curves in  $p^3$ : cubics and curves on a quadratic surface. *Zapiski Nauchnyh Seminarov PDMI*, 476(Geometry and Topology Series 13):92–110, 2018.
- [3] N. Kalinin. Pattern formation and tropical geometry. *Frontiers in Physics*, 8:423, 2020.
- [4] N. Kalinin and M. Shkolnikov. The number  $\pi$  and a summation by  $SL(2, \mathbb{Z})$ . *Arnold Mathematical Journal*, 3(4):511–517, 2017.
- [5] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Introduction to tropical series and wave dynamic on them. *Discrete & Continuous Dynamical Systems-A*, 38(6):2843–2865, 2018.
- [6] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Tropical formulae for summation over a part of  $SL(2, \mathbb{Z})$ . *European Journal of Mathematics*, 5(3):909–928, 2019.
- [7] N. Kalinin and M. Shkolnikov. Sandpile solitons via smoothing of superharmonic functions. *Communications in Mathematical Physics*, 378(3):1649–1675, 2020.
- [8] N. Kalinin and M. Vershinin. Strategic analysis of the russian crab quota auction in 2019. *Marine Policy*, page 104266, 2020.
- [9] J. Kramer and A. Pippich. Snapshots of modern mathematics from oberwolfach: special values of zeta functions and areas of triangles. *Notices of the AMS*, 63(8), 2015.