

Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2019 г.

С. Л. Кузнецов

Введение

В 2019 г. С. Л. Кузнецов продолжил исследование атомарных (инэквациональных) теорий алгебраических структур с операцией итерации (звёздочка Клини). Алгеброй Клини называется структура с тремя операциями, двумя бинарными: \cdot и $+$, и одной унарной: $*$, такая что две бинарные операции задают структуру полукольца с идемпотентным сложением и единицей $\mathbf{1}$, а операция итерации $*$ определяется как неподвижная точка. А именно, a^* есть наименьший, относительно предпорядка $x \preceq y \iff y = x + y$, элемент b , такой что $\mathbf{1} + ab \preceq b$, и одновременно наименьший элемент c , такой что $\mathbf{1} + ca \preceq c$. В отсутствие единицы рассматривается операция положительной итерации a^+ , определяемая соотношениями $a + ab \preceq b$ и $a + ca \preceq c$ (c аналогичными условиями минимальности).

В дальнейшем вместо $+$ мы будем писать \vee , т.к. эта операция является операцией взятия супремума двух элементов в полурешётке, соответствующей предпорядку \preceq . Интерес представляют алгебры Клини в расширенной сигнатуре. Так, естественно добавить операцию взятия инфимума двух элементов, \wedge — таким образом определяется понятие решётки Клини. Можно также определить операции деления, но не относительно равенства, а относительно всё того же предпорядка:

$$a \preceq c/b \iff a \cdot b \preceq c \iff c \preceq a \setminus c.$$

Таким образом определяются решётки Клини с делениями.

Атомарной, или инэквациональной, теорией данного класса алгебр называется множество всех утверждений вида $\alpha \preceq \beta$, где α и β — термы (алгебраические выражения) данной сигнатуры, истинных во всех алгебрах данного класса при всех интерпретациях переменных. Атомарная теория решёток Клини с делениями обозначается **АСТ**; её аксиоматика приведена в отчёте за 2018 г.

Важный класс алгебр Клини — $*$ -непрерывные, где a^* определяется непрерывным образом:

$$ba^*c = \sup\{ba^n c \mid n \geq 0\}.$$

Атомарная теория $*$ -непрерывных алгебр Клини с делениями обозначается **АСТ** $_{\omega}$ и аксиоматизируется инфинитарным образом (см. также отчёт за 2018 г.).

Рассмотрение только атомарных, т.е. довольно слабых, теорий, мотивировано следующим: следующие по выразительной силе теории, хорновы, уже даже для сигнатуры алгебр Клини достигают максимально возможной алгоритмической сложности: Σ_1^0 в общем случае и Π_1^1 в $*$ -непрерывном (Kozen 2002).

1 Научные результаты

1. Результат 2018 г. об алгоритмической неразрешимости **АСТ** усилен в двух направлениях. Во-первых, установлена точная оценка сложности этой логики — она является Σ_1^0 -полной (т.е. наиболее сложной среди рекурсивно перечислимых). Во-вторых, получены результаты о Σ_1^0 -полноте (и, следовательно, алгоритмической неразрешимости) для фрагментов **АСТ**, в которых оставлена только одна из двух операций \vee и \wedge .

По результатам п. 1 сделаны несколько докладов на конференциях и семинарах, готовится журнальная статья.

2. Рассмотрен следующий фрагмент атомарной теории решёток Клини (без делений): рассматриваются только формулы вида $\alpha \preceq \beta$, в которых операция \wedge не встречается в α , но может встречаться в β . Для этого фрагмента построено исчисление без сечения с правилами глубокого вывода циклического типа, доказана алгоритмическая разрешимость.

По результатам п. 2 сделан доклад на конференции “Circularity in Syntax and Semantics”.

3. (совместная работа с С. О. Сперанским) Для расширения исчисления \mathbf{ACT}_ω экспоненциальной модальностью, под знаком которой допускаются правила перестановки, сокращения и ослабления (см. отчёт за 2018 г.), доказана Π_1^1 -трудность проблемы выводимости.

Результат п. 3 планируется к включению в одну из будущих статей.

4. (совместная работа с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым) Через \mathbf{MALC} (мультипликативно-аддитивное исчисление Ламбека) обозначается фрагмент \mathbf{ACT} (или, что то же, \mathbf{ACT}_ω) без итерации. Доказано, что фрагмент \mathbf{MALC} с операциями $\cdot, \backslash, /, \vee$ неполон относительно класса дистрибутивных решёток с делениями; такой же результат получен и для коммутативного случая.

Результаты п. 4 докладывались на конференциях WoLLIC 2019 (некоммутативный случай) и «Мальцевские чтения 2019» (коммутативный случай). Планируется журнальная статья.

5. (совместная работа с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым) Исчисление Ламбека и его расширения (в частности, исчисление \mathbf{MALC}) используются в математической лингвистике как основа для категориальных грамматик. Категориальная грамматика сопоставляет каждому символу алфавита конечное множество формул, и слово $a_1 \dots a_n$ принимается грамматикой, если выводится секвенция $A_1, \dots, A_n \preceq H$, где A_i сопоставлена a_i , а H — специально выделенная «целевая» формула.

Доказано, что грамматики, основанные на фрагменте \mathbf{MALC} с операциями \backslash и \vee , порождают все конечные пересечения контекстно-свободных языков. Также получен результат об алгоритмической неразрешимости (точнее, Σ_1^0 -полноте) для расширения исчисления Ламбека скобочными и субэкспоненциальными модальностями, используемого в системе CatLog3 (Morrill 2019).

Результаты п. 5 докладывались на конференциях WoLLIC 2019 и Formal Grammar 2019 и опубликованы, с полными доказательствами, в их сборниках трудов.

2 Публикации

Опубликованные в 2019 г. работы (не считая работ, уже вышедших ранее в электронной публикации, см. отчёт за 2018 г.):

- [1] S. Kuznetsov. The logic of action lattices is undecidable. In: *Proc. 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science, LICS 2019*. IEEE, 2019.
- [2] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. The complexity of multiplicative-additive Lambek calculus: 25 years later. In: *Logic, Language, Information, and Computation, WoLLIC 2019*, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 11541, Springer, 2019, pp. 356–372.
- [3] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. L-models and R-models for Lambek calculus enriched with additives and multiplicative unit. In: *Logic, Language, Information, and Computation, WoLLIC 2019*, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 11541, Springer, 2019, pp. 373–391.
- [4] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. Undecidability of a newly proposed calculus for CatLog3. In: *Formal Grammar, 24th Intl. Conf.*, Lect. Notes Comput. Sci. vol. 11668, Springer, 2019, pp. 67–83.

Работы, сданные в журналы в 2019 г.:

- [5] S. Kuznetsov. Complexity of the infinitary Lambek calculus with Kleene star. Accepted to *the Review of Symbolic Logic* (minor revisions).

- [6] С. Л. Кузнецов, Н. С. Рыжкова. Ограниченный фрагмент исчисления Ламбека с операциями итерации и пересечения. Сдана в журнал «Алгебра и логика».
- [7] M. Kanovich, S. Kuznetsov, A. Scedrov. The multiplicative-additive Lambek calculus with subexponential and bracket modalities. Submitted to *Journal of Logic, Language, and Information*.

3 Участие в конференциях

- 34th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science (LICS 2019), Ванкувер, Канада, 24–27 июня 2019 г.: доклад “The logic of action lattices is undecidable”
- 5th International Workshop on Structures and Deduction, Дортмунд, Германия, 29–30 июня 2019 г.: доклад “Complexity of reasoning in residuated Kleene algebras”
- 26th Workshop on Logic, Language, Information, and Computation (WoLLIC 2019), Утрехт, Нидерланды, 2–5 июля 2019 г.: два доклада, совместных с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым — “The complexity of multiplicative-additive Lambek calculus: 25 years later” и “L-models and R-models for Lambek calculus with additives and multiplicative unit”
- The 24th Conference on Formal Grammar, Рига, Латвия, 11 августа 2019 г.: доклад “Undecidability of a newly proposed calculus for CatLog”, совместный с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым
- Мальцевские чтения 2019, Новосибирск, 19–23 августа 2019 г.: доклад „Об аддитивных операциях в интуиционистской линейной логике“, совместный с М. И. Кановичем и А. О. Щедровым
- 8th Conference “Logic and Applications”, Дубровник, Хорватия, 23–27 сентября 2019 г.: доклад “Complexity of action logic”
- Trends in Logic 2019, Москва, 2–4 октября 2019 г.: доклад “Undecidability for action lattices and semilattices”
- Circularity in Syntax and Semantics, Гётеборг, Швеция, 20–22 ноября 2019 г.: доклад “Half a way towards circular proofs for Kleene lattices”

4 Работа в международных центрах и группах

В 2019 г. в зарубежных научных центрах не работал. В Москве принимал участие в создании международного центра (МЦМУ МИАН) на базе Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

5 Педагогическая деятельность

В осеннем полугодии 2019 г. прочитана, совместно с Л. Д. Беклемишевым, первая часть обновлённого курса «Вычислительная теория доказательств и λ -исчисление» (место: Научно-образовательный центр МИАН). Весной 2020 г. планируется продолжение (вторая часть курса).

Также продолжено преподавание прежних курсов:

- Функциональное программирование [язык Haskell], факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, январь – март 2019.
- Дискретная математика для разработки алгоритмов и программ (на англ. яз.), факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, сентябрь – октябрь 2019.
- Компьютерный практикум по автоматизированной проверке доказательств [система Coq], мехмат МГУ, осень 2019.
- Спецкурс «Математическая логика» (обязательный для студентов-логиков), мехмат МГУ, совместно с Л. Д. Беклемишевым, В. Н. Крупским, М. Р. Пентусом, Т. Л. Яворской, годовой.

- Просеминар по математической логике и информатике (совместно с Л. Д. Беклемишевым, А. Л. Семёновым, Ф. Н. Пахомовым и др.), мехмат МГУ.
- Кружки Малого мехмата.

Научное руководство студентами: Е. Фофанова (мехмат МГУ, окончила в 2019 г.); М. Вишникин, А. Миляева (мехмат МГУ, 5-й курс); М. Валинкин, И. Святкин (мехмат МГУ, 4-й курс); К. Куценок (мехмат МГУ, 3-й курс); И. Солянкин, Д. Макаров (факультет компьютерных наук НИУ ВШЭ, магистратура).