

Отчет В.А. Петрова за 2019 год

1. Полученные результаты

В предыдущем отчете была сформулирована гипотеза о мотивном разложении “обобщенного мотива Роста” (т.е. некоторого прямого слагаемого в мотиве многообразия полных флагов) для произвольной ориентированной теории когомологий A^* . А именно, разложения в прямую сумму обобщенного мотива Роста биективно соответствуют разложениям $A^*(G)$ в прямую сумму как комодуля над собой. Гипотеза была доказана совместно с Никитой Семеновым при довольно сильных ограничениях на кольцо коэффициентов $A^*(pt)$, которое, впрочем, выполняется для наиболее интересного случая K -теорий Моравы ([1]).

В той же работе показано, что реализация теории когомологий от скрученной формы клеточного многообразия с действием группы G естественным образом несет структуру комодуля над некоторым фактором алгебры Хопфа $A^*(G)$ (по сути, этот фактор уже неявным образом возникал под видом “ J -инварианта”, см. [2]). Это позволяет сформулировать довольно жесткие ограничения на возможный вид мотивных разложений таких многообразий, а в некоторых случаях и явно их вычислить. Даже для классического случая квадратик получается новый результат (впрочем, вскоре передоказанный Карпенко более привычными методами, см. [3]).

В следующем году я планирую заняться дальнейшим развитием этого метода, а также другой задачей: проблемой R -тривиальности (скрученных форм) симметрических пространств над произвольным полем характеристики 0. Понятие R -эквивалентности было введено Маниным для изучения кубических форм. Именно, две рациональные точки на $X(K)$, где X — многообразие над полем K , называются элементарно R -эквивалентными, если существует рациональное отображение из проективной прямой \mathbb{P}^1 в X , образ которого содержит эти точки. R -эквивалентность — транзитивное замыкание этого отношения. Многообразие называется R -тривиальным, если на нем существует только один класс R -эквивалентности.

R -тривиальность редуцированных групп (как алгебраических многообразий) напрямую связана с проблемой Кнезера–Титса о порождении группы точек изотропной полупростой группы унипотентными элементами (см. [4]). При этом как правило в процессе доказательства необходимо рассматривать и другие многообразия, в частности, симметрические пространства (например, в недавнем результате [5]). В качестве другого приложения можно указать результаты о инъективности отображения степени для 0-циклов на исключительных проективных многообразиях (см., например, [6] и список литературы там).

Я планирую исследовать вопрос R -тривиальности симметрических пространств исключительных типов. Идея заключается в том, что их можно рассматривать как “плоскости Розенфельда”, при этом через две точки в общем положении можно провести определенное конечное число “прямых”, которые в свою очередь являются симметрическими пространствами в два раза меньшей размерности и уже классического типа, R -тривиальность которых известна ([7]). Если степени всех конечных расширения базового поля взаимно просты с этим числом, то как минимум одна из этих прямых определена над базовым полем. Можно надеяться

доказать то, что если даже две точки не находятся в общем положении, то найдется точка, находящаяся в общем положении с каждой из них, тем самым R -тривиальность будет установлена.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликован препринт в соавторстве с Никитой Семеновым, статья послана в *Inventiones Math.* [1].

3. Участие в конференциях и школах

Делал доклады на международных конференциях “Workshop on Forms, Flags, Graphs and Beyond” (Оттава, Канада, май 2019) , “Petersburg Motives” (Санкт-Петербург, сентябрь 2019) и “Rank one groups and exceptional groups” (Обервольфах, Германия, ноябрь 2019).

4. Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь сотрудником лаборатории “Современная алгебра и приложения” под руководством Дипендры Прасада (“мегагрант”).

5. Педагогическая деятельность (включая научное руководство)

Преподаю в Академической Гимназии при Санкт-Петербургском государственном университете (“Математический анализ” и спецкурс “Избранные главы современной мате), а также в бакалавриате “Математика” СПбГУ (спецкурсы “Квадратичные формы” и “Проективные однородные многообразия”) и магистратуре “Современная математика” СПбГУ (спецкурс “Tensor categories” на английском языке).

Читал миникурс “Invariant theory: old and new” в рамках летней школы “Visions of algebraic groups” (Санкт-Петербург, август 2019).

Под моим руководством пишут дипломные работы студенты бакалавриата “Математика” СПбГУ Захаров Александр и Сониная Александра.

Список литературы

- [1] V. Petrov, N. Semenov, *Hopf theoretic approach to motives of twisted flag varieties*, arXiv:1908.08770
- [2] V. Petrov, N. Semenov, K. Zainoulline, *J-invariant of linear algebraic groups*, *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 41(6) (2008), 1021–1051
- [3] N. Karpenko, *Extended Petrov–Semenov’s connections*, <https://sites.ualberta.ca/~karpenko/publ/epsc04.pdf>
- [4] P. Gille, *Le Problème de Kneser-Tits*, *Séminaire Bourbaki Volume 2007/2008 Exposés 982-996*, *Astérisque*, no. 326 (2009), Exposé no. 983, 39–81
- [5] S. Alsaody, V. Chernousov, A. Pianzola, *On the Tits-Weiss Conjecture and the Kneser-Tits Conjecture for $E_{7,1}^{78}$ and $E_{8,2}^{78}$* , arXiv:1911.12908

- [6] V. Petrov, N. Semenov, K. Zainoulline, *Zero cycles on a twisted Cayley plane*, Canadian Mathematical Bulletin, 51(1) (2008), 114–124
- [7] E. Vinberg, “Short SO_3 -structures on simple Lie algebras and the associated quasielliptic planes”, Lie Groups and Invariant Theory, Amer. Math. Soc. Transl., Ser.2, 213 (2005), 1–28