# ОТЧЕТ

Пржиялковского Виктора Владимировича
по конкурсу "Молодая математика России"

## 1. Результаты, полученные в 2020 году

Основным предметом изучения в 2020 году были гладкие взвешенные полные пересечения Фано, а также гипотезы зеркальной симметрии Ходжева типа. Основными результатами являются следующие:

- Было показано, что гладкие полные пересечения Фано основной серии являются взвешенными полными пересечениями (совместно с К. Шрамовым).
- Были изучены автоморфизмы квазигладких взвешенных полных пересечений (совместно с К. Шрамовым).
- Была сформулирована и во многих случаях доказана гипотеза о связи размерности антиканонической линейной системы многообразия Фано и слоя над бесконечностью его модели Ландау–Гинзбурга (совместно с И. Чельцовым).

Опишем эти результаты подробнее.

1.1. **Гладкие полные пересечения Фано основной серии.** Самым естественным способом построения новых многообразий Фано является их описание как дивизоров или полных пересечений дивизоров в многообразиях, которые уже известны и хорошо изучены: к примеру, торических многообразиях (в частности, во взвешенных проективных пространствах) или грассманианах. Многообразия Фано, являющиеся полными пересечениями в грассманианах, изучались многими авторами, к примеру, Кюхле или Фатиньети–Монгарди. Взвешенные полные пересечения изучались еще большим числом авторов. С точки зрения классификации наиболее интересными являются многообразия Фано основной серии, то есть имеющие ранг Пикара 1. Заметим, что по теореме Лефшеца это свойство автоматически выполняется для гладких полных пересечений (размерности не меньше 3) в грассманианах и взвешенных проективных пространствах. С другой стороны, для полных пересечениях в других торических многообразиях оно чаще всего не выполнено. В совместной работе с К. Шрамовым мы доказали, что среди гладких полных пересечений размерности не меньше 2 в торических многообразиях многообразиями Фано основной серии являются только взвешенные полные пересечения.

Из теоремы типа Лефшеца (которая, согласно Мавлютову, применима к полным пересечениям в торических многообразиях) следует, что если многообразие является полным пересечением в торическом многообразии, то такое торическое многообразие является либо взвешенным проективным пространством, либо его фактором по конечной группе. Основным аргументом доказательства является следующий. Если гладкое многообразие Фано является полным пересечением взвешенного проективного пространства по конечной группе, то его можно поднять на это накрытие. Тогда если многообразие Фано пересекает множество ветвления, то можно показать, что оно является особым в пересечении с этим множеством, а если не пересекает, то его фундаментальная группа нетривиальна (можно показать, что накрытие связно), что невозможно для гладкого многообразия Фано. Нами были приведены примеры, показывающее, что основное утверждение работы может быть неверным, если отказаться от условия гладкости или условия Фано.

1.2. **Автоморфизмы квазигладких взвешенных полных пересечений.** В 2019 году совместно с К. Шрамовым была доказана следующая теорема.

**Теорема.** *Пусть $X$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение размерности $n$. Предположим, что либо $n \geq 3$, либо $K_X \neq 0$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна за исключением случаев, когда $X$ изоморфно $\mathbb{P}^n$ или квадрике в $\mathbb{P}^{n+1}$.*

В частности, из этой теоремы вытекает такое утверждение.

**Следствие.** *Пусть $X$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение. Предположим, что либо $\dim X \geq 3$, либо $K_X \neq 0$. Тогда группа $\mathrm{Aut}(X)$ редуктивна.*

Несмотря на то, что гладкие многообразия являются наиболее естественным объектом для исследования, во многих случаях имеет смысл рассматривать взвешенные полные пересечения с немного более слабым свойством, а именно, квазигладкие взвешенные полные пересечения, то есть гладкие в "наивном" смысле — такие, аффинные конусы над которыми имеют особенность лишь в вершине. Основным результатом этой части проекта является следующий результат о группах автоморфизмов квазигладких взвешенных полных пересечений.

**Теорема.** *Пусть $\mathbb{P}$ — хорошо сформированное взвешенное проективное пространство, и пусть $X \subset \mathbb{P}$ — квазигладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что либо $\dim X \geq 3$, либо $\dim X = 2$ и $K_X \neq 0$, либо $X$ является рациональной кривой. Тогда $\mathrm{Aut}(X)$ — линейная алгебраическая группа. Далее, пусть $\Gamma$ — редуктивная подгруппа в $\mathrm{Aut}(X)$. Тогда существует действие $\Gamma$ на $\mathbb{P}$, индуцирующее действие $\Gamma$ на $X$.*

Отметим, что утверждение этой теоремы не выполняется для кривых рода 1, являющихся полными пересечениями.

Применяя следствие и последнюю теорему, получаем следующее утверждение.

**Следствие.** *Пусть $X \subset \mathbb{P}$ — гладкое хорошо сформированное взвешенное полное пересечение, не являющееся пересечением с линейным конусом. Предположим, что либо $\dim X \geq 3$, либо $\dim X = 2$ и $K_X \neq 0$, либо $X$ является рациональной кривой. Тогда существует действие $\mathrm{Aut}(X)$ на $\mathbb{P}$, индуцирующее действие $\mathrm{Aut}(X)$ на $X$.*

Как возможное дальнейшее продвижение в этом направлении можно было бы предложить получить ответ на следующий вопрос.

**Вопрос.** *Выполняется ли второе утверждение теоремы 1.2 для всей группы автоморфизмов $\Gamma = \mathrm{Aut}(X)$ без предположения о редуктивности группы $\Gamma$?*

1.3. **Размерность антиканонической линейной системы многообразия Фано и слой над бесконечностью его модели Ландау–Гинзбурга.** Рассмотрим гладкое многообразие Фано $X$ размерности $n$. Его моделью Ландау–Гинзбурга называется некоторая специальная пара $(Y, \mathsf{w})$, состоящая из (квазипроективного) многообразия $Y$ размерности $n$ и регулярной функции

$$\mathsf{w}\colon Y \to \mathbb{A}^1,$$

называемой суперпотенциалом. Слои этой функции компактны и $K_Y \sim 0$, так что общий слой для $\mathsf{w}$ является гладким многообразием Калаби–Яу размерности $n-1$. Гипотеза гомологической зеркальной симметрии предсказывает, что производная категория особенностей особых слоев для $\mathsf{w}$ эквивалентна категории Фукаи для $X$, а категория Фукаи–Зайделя для $(Y, \mathsf{w})$ эквивалентна производной категории когерентных пучков на $X$. Проще говоря, геометрия многообразия $X$ определяется особыми слоями для $\mathsf{w}$.

Модели Ландау–Гинзбурга гладких многообразий Фано часто строятся через торические вырождения таких многообразий. В таком случае многообразие $Y$ содержит тор $(\mathbb{C}^*)^n$, выполнено $K_Y \sim 0$, и существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^*)^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathsf{p}"'] & Y \arrow[d, "\mathsf{w}"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C}
\end{tikzcd} \tag{1}$$

для некоторого многочлена Лорана $\mathsf{p} \in \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}]$, который определяется некоторым торическим вырождением многообразия $X$. В этом случае $\mathsf{p}$ называется торической моделью Ландау–Гинзбурга многообразия $X$, а $(Y, \mathsf{w})$ называется ее компактификацией Калаби–Яу.

Если $(Y, \mathsf{w})$ — компактификация Калаби–Яу торической модели Ландау–Гинзбурга, то число приводимых слоев морфизма $\mathsf{w}\colon Y \to \mathbb{C}$ не зависит от выбора компактификации Калаби–Яу. Точно так же число неприводимых компонент особых слоев для $\mathsf{w}$ не зависит от компактификации. Таким образом, естественно ожидать, что эти числа несут какую-то информацию о гладком многообразии Фано $X$. Так, можно сформулировать следующее.

**Гипотеза.** *Пусть $X$ — гладкое многообразие Фано размерности $n$, а $(Y, \mathsf{w})$ — компактификация Калаби–Яу его торической модели Ландау–Гинзбурга. Тогда*

$$h^{1,n-1}(X) = \sum_{P \in \mathbb{C}^1} \big(\rho_P - 1\big),$$

*где $\rho_P$ — число неприводимых компонент слоя $\mathsf{w}^{-1}(P)$.*

В некоторых случаях эту гипотезу можно вывести из гипотезы гомологической зеркальной симметрии (Кацарков–Концевич–Пантев, Хардер). Недавно она была проверена (в том числе и в рамках выполнения проекта) для компактификаций Калаби–Яу торических моделей Ландау–Гинзбурга гладких трехмерных многообразий Фано и полных пересечений.

Во всех известных случаях коммутативную диаграмму (1) можно расширить до диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{C}^*)^n \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathsf{p}"'] & Y \arrow[r, hook] \arrow[d, "\mathsf{w}"] & Z \arrow[d, "\mathsf{f}"] \\
\mathbb{C} \arrow[r, equal] & \mathbb{C} \arrow[r, hook] & \mathbb{P}^1,
\end{tikzcd} \tag{2}$$

в которой $Z$ является гладким собственным многообразием, удовлетворяющим некоторым естественным геометрическим условиям: например, слой $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ должен быть приведен, иметь нормальные пересечения, и

$$\mathsf{f}^{-1}(\infty) \sim -K_Z.$$

Пара $(Z, \mathsf{f})$ называется компактификацией лог-Калаби–Яу торической модели Ландау–Гинзбурга $\mathsf{p}$. Заметим, что число неприводимых компонент слоя $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ не зависит от выбора компактификации лог-Калаби–Яу, так что можно ожидать, что это число содержит некоторую информацию о многообразии Фано $X$. Это, в частности, показывают следующие примеры.

**Пример.** Пусть $X$ — гладкая поверхность дель Пеццо, а $(Z, \mathsf{f})$ — компактификация лог-Калаби–Яу ее торической модели Ландау–Гинзбурга (такие компактификации построены Уру-Кацарковым–Орловым). Тогда слой $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ состоит из

$$\chi\big(\mathcal{O}(-K_X)\big) - 1 = h^0\big(\mathcal{O}_X(-K_X)\big) - 1 = K_X^2$$

неприводимых рациональных кривых.

**Пример.** Пусть $X$ — трехмерное многообразие Фано, такое, что дивизор $-K_X$ очень обилен, и пусть $(Z, \mathsf{f})$ — компактификация лог-Калаби–Яу торической модели Ландау–Гинзбурга, построенной мной и лондонской группой исследователей. Тогда $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ состоит из

$$\chi\big(\mathcal{O}(-K_X)\big) - 1 = h^0\big(\mathcal{O}_X(-K_X)\big) - 1 = \frac{(-K_X)^3}{2} + 2$$

неприводимых рациональных поверхностей.

Можно сформулировать следующую гипотезу.

**Гипотеза.** *Пусть $X$ — гладкое многообразие Фано, а $(Z, \mathsf{f})$ — компактификация лог-Калаби–Яу его торической модели Ландау–Гинзбурга. Тогда слой $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ состоит из*

$$\chi\big(\mathcal{O}(-K_X)\big) - 1 = h^0\big(\mathcal{O}_X(-K_X)\big) - 1$$

*неприводимых компонент.*

В рамках этой части проекта мной совместно с И. А. Чельцовым, был получен следующий результат.

**Теорема.** *Эта гипотеза выполнена для*

- *жестких максимально мутируемых торических моделей Ландау–Гинзбурга для гладких трехмерных многообразий Фано;*
- *торических моделей Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя для гладких полных пересечений Фано;*
- *торических моделей Ландау–Гинзбурга типа Гивенталя для торических многообразий, для которых двойственные торические многообразия допускают крепентное разрешение.*

Заметим, что из обсуждаемой гипотезы и гипотезы существования торических многообразий Ландау–Гинзбурга для гладких многообразий Фано следует, что

$$h^0\big(\mathcal{O}_X(-K_X)\big) \geqslant 2.$$

Это утверждение доказано для $\dim(X) \leqslant 5$ (Херинг–Вуазен, Хернин–Сметч). Заметим также, что из гипотезы Каваматы следует, что $h^0(\mathcal{O}_X(-K_X)) \geqslant 1$.

Из гипотезы гомологической зеркальной симметрии следует, что монодромия в окрестности слоя $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ максимально унипотентна. Таким образом, если слой

$\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ является дивизором с простыми нормальными пересечениями, то ожидается (Коллар–Ксю), что его двойственный комплекс пересечения гомеопорфен сфере размерности $n-1$. Это верно для $n \leqslant 5$ (Коллар–Ксю). Заметим, что слой $\mathsf{f}^{-1}(\infty)$ может и не иметь простые нормальные пересечения.

## 2. Список работ

В этом году вышли ранее принятые работы

- К. А. Шрамов, В. В. Пржиялковский, “Автоморфизмы взвешенных полных пересечений”, Алгебра, теория чисел и алгебраическая геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, Тр. МИАН, 307, МИАН, М., 2019, 217–229. (Не вошла в подобный список 2019 года.)
- V. Przyjalkowski, C. Shramov, “Bounds for smooth Fano weighted complete intersections”, Commun. Number Theory Phys., 14:3 (2020), 511–553.
- В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, “Взвешенные полные пересечения Фано большой коразмерности”, Сиб. матем. журн., 61:2 (2020), 377–384.
- Л. Кацарков, В. В. Пржиялковский, Э. Хардер, “Феномен P=W”, Матем. заметки, 108:1 (2020), 33–46.
- V. Przyjalkowski, C. Shramov, “Hodge level for weighted complete intersections”, Collect. Math., 71:3 (2020), 549–574.

Были написаны и приняты к печати работы

- В. В. Пржиялковский, К. Ритш, “Модели Ландау-Гинзбурга полных пересечений в лагранжевых грассманианах”, УМН.
- В. В. Пржиялковский, К. А. Шрамов, “Автоморфизмы квазигладких взвешенных полных пересечений”, Матем. сб., arXiv:2006.01213.

и написаны работы

- I. Cheltsov, V. Przyjalkowski, “Fibers over infinity of Landau-Ginzburg models”, arXiv:2005.01534.
- V. Przyjalkowski, C. Shramov, “Smooth prime Fano complete intersections in toric varieties”, arXiv:2010.14447.
- V. Przyjalkowski, “On Calabi–Yau compactifications of Landau–Ginzburg models for coverings of projective spaces”.

## 3. Участие в научных конференциях

Я участвовал, в частности, в следующих конференциях и семинарах:

- “Homological Mirror Symmetry and Topological Recursion”, Майами, США, 27 января — 1 февраля, 2020.
- “Workshop on Hodge theory and local systems”, София, Болгария, 3 марта — 5 марта, 2020.
- “Beijing–Moscow Mathematics Colloquium” (онлайн), Москва, Россия, 29 мая, 2020.
- “Дни геометрии в Новосибирске — 2020”, Новосибирск, Москва, 17 августа — 19 августа, 2020.
- “Семинар кафедры дифференциальной геометрии и приложений МГУ” (онлайн), Москва, Россия, 28 сентября, 2020.

- “Fanosearch group meeting of Imperial College London” (онлайн), Лондон, Великобритания, Москва, Россия, 5 ноября, 2020.
- “Recent Applications of the Theory of O-Minimal Structures to Various Questions in Hodge Theory” (онлайн), Майами, США, 16 ноября — 20 ноября, 2020.
- Однодневная конференция, посвященная памяти В. А. Исковских, Москва, Россия, 26 декабря, 2019.

## 4. Работа в научных центрах и международных группах

Я являюсь заместителем руководителя Лаборатории зеркальной симметрии НИУ ВШЭ.

## 5. Педагогическая деятельность

Я являюсь соруководителем семинара Исковских (МИАН–МГУ). Также я являюсь организатором конференций:

- Онлайн-конференция по алгебраической геометрии “Back to school”, 27 августа — 28 августа 2020.
- Однодневная конференция, посвященная памяти В.А. Исковских (Москва, 24 декабря).

Также я являюсь научным руководителем Михаила Овчаренко (ВШЭ).

## 6. Итоги работы за 2018–2020 годы

Основными в заявке были три проекта. Первые два относятся к изучению взвешенных полных пересечений Фано, и были реализованы совместно с К. А. Шрамовым. Поставленные в заявке проблемы в этом направлении были полностью решены. А именно, были получены ограничения на веса взвешенных проективных пространств, в которых допускаются гладкие взвешенные полные пересечения Фано, и на степени гиперповерхностей, задающих такие полные пересечения. Это завершило программу классификации таких многообразий. А именно, вместе с полученными ранее результатами других авторов это дало возможность (с помощью эффективного компьютерного перебора) найти все такие многообразия любой наперед заданной размерности.

Вторым проектом в этом направлении стала классификация “минимальных” и “близких к минимальным” гладких взвешенных полных пересечений с точки зрения их структуры Ходжа. Эта задача также была решена. Любопытно, что минимальность всех таких многообразий оказалась связана со строением их производных категорий когерентных пучков.

Кроме этих результатов был получен (совместно с К. А. Шрамовым) и ряд других результатов, относящихся к взвешенным полным пересечениям. Так, были изучены автоморфизмы квазигладких взвешенных полных пересечений. Другой результат тесно связан с другим направлением работы — зеркальной симметрией. А именно, было доказано существование неф-разбиений для гладких взвешенных полных пересечений коразмерности два. Такие неф-разбиения являются ключевым ингредиентом построения моделей Ландау–Гинзбурга полных пересечений. Частичное дальнейшее продвижение в этом направлении получено моим учеником М. Овчаренко.

Другим представленным в заявке направлением были теоретико-ходжевы аспекты зеркальной симметрии. Гипотеза топологической зеркальной симметрии постулирует двойственность ромбов Ходжа зеркально двойственных многообразий Калаби–Яу.

Для того, чтобы сформулировать подобную гипотезу для многообразий Фано, было необходимо определить аналоги чисел Ходжа для моделей Ландау–Гинзбурга. Это было сделано Кацарковым–Концевичем–Пантевым. Ими были высказаны гипотезы, связанные с этими числами и зеркальной симметрией. Эти гипотезы были доказаны ранее для поверхностей дель Пеццо (совместно в В. Лунцем). Планом минимум в этом направлении было доказательство гипотез для трехмерных многообразий Фано основной серии, планом максимум — для всех трехмерных многообразий Фано. План максимум был реализован совместно с И. Чельцовым. Более того, были высказана зеркальная гипотеза P=W, обобщающая гипотезы Кацаркова–Концевича–Пантева и связывающая смешанную структуру Ходжа дополнения многообразия Фано к антиканоническому дивизору с превратной фильтрацией Лере для двойственной модели Ландау–Гинзбурга. Изучение этой гипотезы находится только в начале пути, однако совместно с Кацарковым и Хардером была доказана их связь с гипотезами Кацаркова–Концевича–Пантева, а также сама гипотеза P=W в простейшем трехмерном случае. В конце заявки была высказана надежда на возможность доказательства гипотез Кацаркова–Концевича–Пантева для полных пересечений, однако на данный момент эта задача далека от решения. Единственным продвижением в этом направлении стало полученное мною доказательство гипотезы о приводимых слоях модели Ландау–Гинзбурга, которое является частным случаем гипотез Кацаркова–Концевича–Пантева. Также некоторые продвижения в этом направлении были сделаны А. Хардером.

Наконец, за три отчетных года были получены результаты, не связанные с представленными в заявке. Совместно с И. А. Шрамовым и К. А. Чельцовым был изучен вопрос рациональности особых трехмерных двойных пространств с ветвлением в квартике (обобщающий, таким образом, результат К. Вуазен). Были (совместно с теми же соавторами) изучены группы автоморфизмов некоторых интересных нодальных многообразий, а также классифицированы гладкие трехмерные многообразия Фано с бесконечными группами автоморфизмов.

За время работы над проектом была защищена докторская диссертация, опубликовано 12 работ, еще несколько подано или принято в печать.