ОТЧЕТ С. РЫБАКОВА ПО КОНКУРСУ "МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ".

Были получены новые результаты о дзета–функциях суперсингулярных поверхностей Куммера над конечными полями. Напомним, что поверхность Куммера $K(A)$, ассоциированная с абелевой поверхностью A — это разрешение особенностей фактора A по инволюции $a \mapsto -a$. Если характеристика не равна 2, то $K(A)$ будет поверхностью K3. Дзета-функции таких поверхностей были классифицированы в статье [Ry14]. Мы будем заниматься дзета-фунциями поверхностей над конечным полем, которые изоморфны $K(A)$ над алгебраическим замыканием. Такие поверхности не всегда получаются как поверхности Куммера ассоциированные с какой-то абелевой поверхностью над конечным полем, но для простоты мы тоже будем называть их поверхностями Куммера.

Мы используем следующую конструкцию. Будем предполагать, что характеристика основного поля $p > 5$. Если A — абелева поверхность с действием конечной группы $G \subset \mathrm{Aut}_0(A)$ (т.е. мы предполагаем, что G сохраняет нуль группового закона на A), то фактор A/G будет бирационален поверхности K3, если выполнены следующие условия: действие группы G симплектическое, не имеет неподвижных кривых, и все особые точки фактора рациональны. В этом случае разрешение особенностей A/G называывается обобщенной поверхностью Куммера $K(A, G)$. По теореме Огуса, если абелева поверхность A суперсингулярна, то $K(A, G)$ изоморфна над алгебраическим замыканием обычной поверхности Куммера ассоциированной с, возможно, какой-то другой суперсингулярной абелевой поверхностью.

Возможные группы, которые могут действовать на абелевой поверхности над алгебраически замкнутым полем, и для которых выполняются три условия выше, были описаны Кацурой. Однако остался открытым вопрос, над какими конечными полями такие действия возможны. Для ответа на этот вопрос мы получаем классификацию Кацуры другим методом,который работает над любым полем.

Скажем, что действие группы G на абелевом многообразии A *жесткое*, если представление G в модуле Тейта $T_\ell(A)$ *не имеет неподвижных точек*, то есть для каждого $g \in G$ порядка r собственные значения g на $V_\ell(A)$ являются примитивными корнями из единицы степени r. Это условие эквивалентно тому, что при $r > 1$ у действия g на A только конечное число неподвижных точек.

В основе нашей классификации лежат следующие две теоремы. Пусть ζ_n обозначает примитивный корень из единицы степени n. Мы будем обозначать символом H_s алгебру кватернионов с центром $\mathbb{Q}$ и нетривиальными инвариантами в простом числе s и в бесконечности. Для вещественного квадратичного расширения K поля $\mathbb{Q}$ мы обозначаем через $H_\infty(K)$ алгебру кватернионов с центром K и нетривиальными инвариантами в бесконечности.

Теорема 1. *Циклическая группа G порядка n жестко действует на абелевом многообразии из класса изогении многообразия A над полем k тогда и только тогда, когда существует вложение кругового поля $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ в алгебру эндоморфизмов $\mathrm{End}_k(A) \otimes \mathbb{Q}$.*

Теорема 2. *Пусть $p > 5$, и пусть E — эллиптическая кривая над полем k. Группа G из списка Кацуры жестко действует на абелевой поверхности, которая изогенна E^2 над полем k, тогда и только тогда, когда существует вложение алгебры с делением H_G в алгебру матриц $\mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathrm{End}_k(E) \otimes \mathbb{Q})$ согласно следующей таблице:*

G	BD_2	BD_3	BD_4	BD_5	BD_6
H_G	H_2	H_3	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{3}))$

G	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$	$\mathrm{CSU}_2(\mathbb{F}_3)$	$\mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_3)$
H_G	H_2	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{2}))$	$H_\infty(\mathbb{Q}(\sqrt{5}))$

Эти результаты сводят вопросы существования абелевых поверхностей над конечным полем с действием данной группы к вопросу о вложимости полупростых алгебр над $\mathbb{Q}$, а эта задача чисто вычислительная. Получив список возможных пар (A, G) можно установить, когда такое действие будет симплектическим и как устроены особенности фактора A/G. Отсюда мы уже можем получить список возможных дзета-функций обобщенных поверхностей Куммера $K(A, G)$. Такой список будет очень длинным, поэтому в работе [Ry] мы вычисляем их только для суперсингулярных абелевых поверхностей над простым полем $\mathbb{F}_p$. Это основной случай, который нам нужен для исследований семейств поверхностей $K3$ и связанных с ними башен кривых.

Дзета–функция суперсингулярной поверхности $K3$ равна

$$Z_X(t) = \frac{1}{(1-t)P_2(qt)(1-q^2t)}, \tag{1}$$

где

$$P_2(t) = \det(1 - t\,\mathrm{Fr}\,|\,\mathrm{NS}(\overline{X}) \otimes \mathbb{Q}) = \prod_r \Phi_r(t)^{\lambda_r}$$

— это характеристический многочлен действия Фробениуса на группе Нерона–Севери $\mathrm{NS}(\overline{X})$. Все корни $P_2(t)$ являются корнями из единицы, поэтому можно разложить этот многочлен в произведение круговых многочленов Φ_r. Отсюда следует, что дзета–функция однозначно определятся числами λ_r. Мы будем обозначать эту дзета–фнкцию следующим образом: $(1^{\lambda_1}, \dots, r^{\lambda_r})$.

Теорема 3. [Ry] *Пусть $p > 2$. Тогда над $\mathbb{F}_p$ существуют суперсингулярные поверхности $K3$ со следующими дзета–функциями.*

$Z_X(t)$	p	$f_A(t)$	G
$1^{20}, 2^2$	$p \equiv 1(4)$	$(t^2 - p)^2$	C_4
$1^{16}, 2^6$	$p \equiv 3(4)$	$(t^2 + p)^2$	C_4
	$p \equiv 5(12)$	$(t^2 + p)^2$	C_6
$1^{15}, 2^7$	$p \equiv 1(4)$	$(t^2 + p)^2$	C_4
$1^{13}, 2^9$	$p \equiv 3(4)$	$(t^2 - p)^2$	C_4
$1^7, 2^7, 4^4$	$p \equiv 1(3)$	$(t^2 + p)^2$	C_3
	$p \equiv 2(3)$	$(t^2 - p)^2$	C_3
$1^{12}, 2^6, 3, 6$	$p \equiv 1(3)$	$t^4 + pt^2 + p^2$	C_3
	$p \equiv 2(3)$	$t^4 + pt^2 + p^2$	C_6
$1^5, 2^5, 3, 4^4, 6$	$p \equiv 2(3)$	$t^4 + pt^2 + p^2$	C_3
$1^5, 2^5, 4^4, 12$	$p \equiv 1(3)$	$t^4 - pt^2 + p^2$	C_3
$1^{12}, 2^6, 12$	$p \equiv 2(3)$	$t^4 - pt^2 + p^2$	C_3
$1^{18}, 3, 6$	$p \equiv 1(3)$	$t^4 + pt^2 + p^2$	C_6
$1^{14}, 2^4, 12$	$p \equiv 1(3)$	$t^4 - pt^2 + p^2$	C_6
$1^{16}, 2^2, 12$	$p \equiv 2(3)$	$t^4 - pt^2 + p^2$	C_6

1. Итоги

Изначально планировалось реализовать программу из статьи [Ry18] и построить хорошие башни алгебраичеких кривых над полем $\mathbb{F}_p$. Однако, башни, которые удается построить, оказываются хорошими только над $\mathbb{F}_{p^2}$, а для работы над $\mathbb{F}_p$ нужны новые идеи. В статье [GaRy19] мы построили пример такой башни, и в целом примеров такого рода еще много.

Теорема 4. [GaRy19] *Башня над $k = \mathbb{F}_{p^2}$, которая получается из семейства зеркально двойственному трехмерному проективному пространству, оптимальна для $p = 3$, и является хорошей для $p \equiv 3(4)$.*

В результате поисков новых идей появилась статья [Ry] о дзета–функциях суперсингулярных поверхностей Куммера. В данным момент она почти готова к публикации, осталось доредактировать и, возможно, описать еще несколько дзета–функций.

Педагогическая деятельность

Совместно с В. Вологодским, С Горчинским и Д.Осиповым мы организуем семинар по арифметической геометрии в НИУ ВШЭ (http://www.mathnet.ru/conf932).

Список литературы

[Ry14] Rybakov S., *The finite group subschemes of abelian varieties over finite fields.* Finite Fields and Their Applications. 29 (2014), 132-150. arXiv:1006.5959

[Ry18] Rybakov S., *Families of algebraic varieties and towers of algebraic curves over finite fields.* Math. Notes., 104:5 (2018), 712–719. https://arxiv.org/abs/1710.05395

[GaRy19] Galkin S., Rybakov S., *A Family of K3 Surfaces and Towers of Algebraic Curves over Finite Fields.* Math. Notes., 106:6, (2019), 1014–1018. https://arxiv.org/abs/1910.14379

[Ry] Rybakov S., *Supersingular generalised Kummer surfaces over finite fields.* Preprint.