

ОТЧЕТ ЗА 2018 ГОД ПО КОНКУРСУ “МОЛОДАЯ МАТЕМАТИКА РОССИИ”

Соломадин Григорий Дмитриевич

Полученные результаты

За первый год были проведены исследования и получены новые существенные результаты по трем различным направлениям: топологии квазиторических многообразий, проблеме явного построения бордизма между стабильно комплексными бордантными многообразиями, а также существованием действия тора максимальной размерности на гладких проективных алгебраических многообразиях.

Показано, что условие существования ПНР-структуры (т.е. расщепления стабильно нормального комплексного расслоения в сумму Уитни одномерных; сокращение от полностью нормально расщепимого) на квазиторическом многообразии равносильно условию стабильного расщепления любого комплексного векторного расслоения над ним. Любое топологическое пространство, гомотопически эквивалентное квазиторическому многообразию с таким свойством, также им обладает. Для изучения данного свойства были успешно применены методы алгебраической топологии. В частности, были получены эквивалентные критерии существования ПНР-структуры на квазиторическом многообразии в терминах кольца K -теории, кольца когомологий и многочлена объема мультивеера квазиторического многообразия. Для формулировки K -теорного критерия автором вводится и изучается выпуклый замкнутый конус $W(M^{2n}) \subset \tilde{K}^0(M^{2n}) \otimes \mathbb{R}$ квазиторического многообразия M^{2n} . Данный конус полностью описан для проективных пространств $\mathbb{C}P^n$ любой размерности (в терминах пределов циклических многогранников) и декартовых произведений квазиторических многообразий (с помощью изоморфизма Кюннета в K -теории). Были получены примеры квазиторических многообразий с неполиэдральными конусами. При $n \leq 6$ доказана полиэдральность данного конуса и найден конечный набор его порождающих, что позволяет проверять условие критерия на компьютере. Далее, когомологический критерий является далеким обобщением теоремы Ж. Ланна о сигнатуре односвязного замкнутого стабильно комплексного ПНР-многообразия размерности 4 в семействе квазиторических многообразий произвольной размерности. В качестве приложения когомологического ПНР-критерия получено необходимое условие на комбинаторику многогранника моментов P^n гладкого проективного торического ПНР-многообразия M^{2n} , $n \geq 3$: решетка граней (простого) многогранника P^n не имеет минимальных пустых симплексов на n вершинах. Из этого вытекает (с использованием полученного автором ранее запрета на треугольные грани у P^n), что при $n = 3$ многогранник P^n является флаговым. Наконец, ПНР-критерий в терминах многочлена объема приводит к новым задачам о положительно полуопределенных вещественных формах высших степеней, близким по формулировке к 17-ой проблеме Гильберта.

Построены две явные геометрические конструкции бордизма между гиперповерхностью Милнора $H_{1,n}$ и декартовым произведением проективных пространств $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$. Первый подход состоит в обобщении метода Б. Тотаро склейки стабильно комплексных многообразий с границей, использованном им в задаче о числах Черна комплексных многообразий с особенностями. Второй подход заключается в применении конструкции С. Саркара квазиторического орбифолда с квазиторической границей в гладком случае.

Введенные Н. Рэем ПНР-гиперповерхности в произведении $BF_i \times BF_j$ (дуализации некоторых комплексных расслоений $\xi_{i,j} := \overline{\beta_i} \otimes \overline{\beta'_j} \rightarrow BF_i \times BF_j$) были ранее описаны автором как гладкие проективные алгебраические многообразия $S_{i,j}$ (был получен явный набор уравнений). Данные многообразия являлись возможными кандидатами на роль мультипликативных порождающих в кольце комплексных бордизмов в семействе квазиторических ПНР-многообразий. Автором было ранее получено описание $S_{i,j}$ как результата $j - 1$ последовательных не-эквивариантных раздутий многообразий Бухштабера-Рэя $BR_{i,j} \subset BF_i \times \mathbb{C}P^j$. Теперь получено более простое (индуктивное) описание $S_{i,j}$ как раздутия многообразия $BF_{i-1} \times BF_j$ вдоль

$$S_{i-1,j-1} \subset BF_{i-1} \times BF_{j-1} \subset BF_{i-1} \times BF_j.$$

Автором доказан изоморфизм кольца когомологий многообразия $S_{i,j}$ с вещественными коэффициентами как фактора кольца $H^*(BF_i \times BF_j; \mathbb{R})$ по аннигилятору элемента $c_1(\xi_{i,j})$ (первый класс Черна линейного расслоения $\xi_{i,j}$). Найдены все числа Бетти многообразий $S_{i,j}$ с помощью вычисления многочлена Ходжа-Делиня при индуктивном описании $S_{i,j}$. Также найдены биградуированные числа Бетти $\beta^{-1,2^*}(S_{i,j})$ при любых i, j . При помощи данных вычислений и использования библиотеки симплицальных 4-сфер PolyDB (PolyMake) показано, что не существует простого многогранника с h -вектором и биградуированными числами Бетти многообразия $S_{2,3}$. Таким образом, показано, что $S_{2,3}$ не является торическим многообразием. Готовится препринт с соответствующими результатами, а также ведутся поиски топологических препятствий к существованию действия тора максимальной размерности на $S_{i,j}$.

Публикации

[1] “Quasitoric stably normally split manifolds”,

Proc. MIAN, Topology and physics, in collection. On occasion of academic S.P. Novikov’s 80 birthday, 302, MAIK “Nauka/Interperiodika”, Moscow.
DOI 10.1134/S0371968518030196. Arxiv:1802.02176.

[2] “Quasitoric totally normally split representatives in the complex cobordism ring”

Arxiv:1704.07403 *Принята к печати в Мат. Заметки, 2019, март.*

[3] “The explicit geometric constructions of bordism of Milnor hypersurface $H_{1,n}$ and $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^{n-1}$ ”

Arxiv:1807.03742 *Подана в J. Math. Soc. Japan.*

Научные конференции и доклады на семинарах

[1] International conference “Lomonosov 2018”, Moscow, 9–13 April
Talk “Quasitoric TNS-manifolds”

[2] International conference “Algebraic topology, Combinatorics and Mathematical Physics” on occasion of V.M. Buchstaber’s birthday. Seminar for young researchers “International Seminar on Toric Topology and Homotopy Theory”, Moscow, 24–30 May

Talk “Totally normally split quasitoric manifolds”

[3] Visit to Krakow

International conference “Glances@Manifolds 2018”, Krakow, Poland, 2–6 July.

Poster “Toric totally normally split manifolds”

[4] Iskovskih’s scientific seminar “Lie groups and theory of invariants”, Moscow, 25 April

Talk “Toric TNS-manifolds and combinatorics of the associated moment polytope”

[5] Postnikov’s scientific seminar on algebraic topology and applications, 9 October

Talk “Geometric constructions of bordism of stably complex manifolds and their applications”

[6] PhD Thesis defense. Planned on 27 December.

Педагогическая деятельность

[1] Чтение спецкурса “Комплексные бордизмы и действия тора” под рук. проф. Т.Е. Панова (5 лекций), мехмат МГУ, ноябрь-декабрь.