Отчёт по гранту «Молодая математика России» за 2019 г.

С. О. Сперанский

Полученные результаты

В этом году мной проводились исследования по следующими направлениями:

i. алгебраическая логика;

ii. кванторные модальные логики;

iii. исчисление Ламбека и его обогащения.

Ниже приведено краткое описание основных результатов в каждом из трёх направлений.

Алгебраическая логика

Немаловажную роль в логике и теоретической информатике играет понятие *бирешётки*; см., например, [6, 2, 3]. Отличительной особенностью бирешёток является наличие двух отношений порядка (вместо одного, как в обычных решётках). Кроме того, если в качестве носителя простейшей булевой алгебры выступает $\{0,1\}$, то в случае бирешёток эту функцию берёт на себя $\{0,1\} \times \{0,1\}$; обозначим соответствующую алгебру через $\mathsf{BD4}$. Отметим, что $\mathsf{BD4}$ задаёт семантику известного фрагмента релевантной логики, который называют *следованием первой ступени* или *полезной четырёхзначной логикой Белнапа–Данна*.

Значительное число работ в современной логике посвящено построению модальных логик на основе $\mathsf{BD4}$ (или, шире, бирешёток). Здесь существует ряд различных подходов, сравнение которых нередко представляет собой нетривиальную задачу. Нас будут интересовать:

— *модальная логика Белнапа–Данна*, предложенная в [17] и обозначаемая BK;

— *модальная логика бирешеток*, предложенная в [8] и обозначаемая MBL.[†]

Для каждой рассматриваемой логики L через $\mathcal{E}L$ будет обозначаться решётка расширений L, т.е. множество всех логик (в том же языке), расширяющих L, снабженное естественной решёточной структурой. Стоит отметить, что у BK имеется версия $\underline{\mathsf{BK}}$ в языке с дополнительными константами, причём $\mathcal{E}\underline{\mathsf{BK}}$ устроена намного проще, чем $\mathcal{E}\mathsf{BK}$; см. подробности в [15].

Напомним, что через K обозначают наименьшую (нормальную) модальную логику. Пусть K^2 и $\underline{\mathsf{BK}}^2$ — это бимодальные версии K и $\underline{\mathsf{BK}}$ соответственно. Таким образом, K^2 представляет собой наименьшую (нормальную) бимодальную логику.

Теорема. *Существует решёточный изоморфизм между* $\mathcal{E}\mathsf{MBL}$ *и* $\mathcal{E}\mathsf{K}^2$.

В ходе получения этого результата был также построен изоморфизм между $\mathcal{E}\mathsf{MBL}$ и $\underline{\mathsf{BK}}^2$, что связывает подходы из [17] и [8]. Используемые здесь методы относятся к области универсальной алгебры: каждую из рассматриваемых решёток L-расширений можно отождествить с решёткой подмногообразий подходящего многообразия алгебр; см. [13, 21, 14, 15] и [19].

Кроме того, из доказательства теоремы выше можно извлечь явный изоморфизм Ω (индуцируемый подходящей вычислимой формульной трансляцией). Оказывается, что Ω сохраняет многие хорошие свойства. В частности, для любого MBL-расширения L:

[†] Интересно, что MBL даже не является нормальной (в отличие от BK).

— L разрешимо (полно в co-NP, PSPACE и т.п.), если и только если таково $\Omega(L)$;

— L обладает интерполяционным свойством Крейга, если и только если им обладает $\Omega(L)$.

Таким образом, Ω не только сохраняет решёточную структуру, но и большую часть «метаматематической структуры». Полученная трансляция может оказаться весьма полезной, так как K^2 выглядит куда более естественно и намного более изучена, чем MBL.

Кванторные модальные логики

Идея интерпретации отрицания как модального оператора невозможности получила широкое распространие в пропозициональной логике; см., например, обзор Дошена в [5]. Особый интерес представляют логики, обогащающие позитивный фрагмент (пропозициональной) интуиционистской логики. Наиболее базовой среди них является логика N, предложенная Дошеном.

Далее, N может быть расширена до *логики Гейтинга–Оккама* N^*, которая была предложена в [1] как база для изучения оснований *фундированной семантики* логических программ с отрицанием; см. также [7]. Отметим, что у N^* есть весьма элегантная семантика типа Раутли, недоступная в случае N; ср. [20].

Наконец, Одинцов недавно заметил, что пропозициональная версия логики Hype, которая была представлена в [11] как система, подходящая для работы с так называемыми «гиперинтенциональными» контекстами, может быть получена из N^* добавлением законов введения и снятия двойного отрицания. В частности, это приводит к существенному упрощению семантики для пропозициональной версии Hype.

Естественным образом возникает задача изучения предикатных версий такого рода логик. Мной определены предикатные версии N и N^*, а также семантика типа Раутли для предикатной версии Hype. Для каждой логики доказана теорема о сильной полноте (по крайней мере, для не более чем счётных сигнатур). При этом в [11] была приведена теорема о слабой полноте для предикатной версии Hype относительно другой семантики. Отметим следующее:

— семантика, предложенная в [11], выглядит куда сложнее, чем используемая мной семантика типа Раутли;

— Ляйтгеб утверждает лишь слабую полноту, тогда как мной доказывается сильная полнота, из которой легко выводится компактность относительно семантики Раутли;

— в [11] дан лишь набросок доказательства, и большое число деталей оставлено в качестве упражнений читателю.[‡]

Мои исследования в данной области можно рассматривать как часть общей программы по изучению *кванторных интуиционистских модальных логик*.

Соответствующий текст находится в процессе оформления. Его планируется подать на рецензию в журнал в январе 2020 года.

Исчисление Ламбека и его обогащения

Исчисление Ламбека является основой категориальной грамматики и играет ключевую роль в формализации синтакса естественного языка (во всяком случае английского). Различного рода языковые явления мотивируют обогащение базового исчисления Ламбека тем или иным образом. Такого рода обогащение может оказаться неразрешимым (даже вне арифметической иерархии) или значительно более сложным с точки зрения вычислительной сложности. Совместно с С. Л. Кузнецовым (одним из победителей «Молодой математики России 2017») я занимаюсь изучением вычислительных аспектов естественных обогащений исчисления Ламбека. Точнее, речь идёт о некоторых инфинитарных исчислениях с ω-правилами.

[‡]Вместе с тем в [11] приведён ошибочный результат о наличии дизъюнктивного свойства у Hype.

Пусть дана некоторая (монотонная) логика L с ω-правилами. С ней можно естественным образом связать *оператор L-выводимости* $\mathscr{D}_L$, который по всякому множеству посылок Γ выдает множество всех формул, выводимых из Γ за один шаг. Далее, имеется как минимум два подхода к измерению сложности логики L:

i. можно оценивать степень невычислимости наименьшей неподвижной точки для $\mathscr{D}_L$, т.е. самой L как множества формул;

ii. можно оценивать *замыкающий ординал* для $\mathscr{D}_L$, т.е. наименьший ординал, итерация $\mathscr{D}_L$ вдоль которого даёт множество всех выводимых в L формул.

Это можно сравнить с тем, как происходит измерение сложности в теории истины по Крипке; см. [22]. Обозначим через ACT_ω *инфинитарную логику действий* (см. отчёт С. Л. Кузнецова за 2018 г.), а через $!\mathrm{ACT}_\omega$ — её обогащение посредством *субэкспоненциальной модальности* (такие модальности возникали, в частности, в [12, 9, 10]).

Мной было показано, что замыкающий ординал для оператора $!\mathrm{ACT}_\omega$-выводимости равен ω_1^{CK}, т.е. первому неконструктивному ординалу, который называется *ординалом Чёрча–Клини*. Также было отмечено, что полученные С. Л. Кузнецовым нижние оценки о Π_1^1-трудности для $!\mathrm{ACT}_\omega$ являются точными: проблема выводимости для $!\mathrm{ACT}_\omega$ оказывается ограничена в Π_1^1, а значит, Π_1^1-полна.

Опубликованные работы

2019 Reasoning about arbitrary natural numbers from a Carnapian perspective (with L. Horsten). *Journal of Philosophical Logic* 48(4), 685–707. [Published online in 2018.]

2019 Belnap–Dunn modal logics: truth constants vs. truth values (with S. P. Odintsov). *Review of Symbolic Logic*. Published online. 21 p.

Участие в конференциях

В этом году я участвовал в следующих конференциях.

— Приглашённый пленарный доклад
Название: Arbitrary natural numbers in the framework of Carnapian quantified modal logic
St. Petersburg Days of Logic and Computability IV
(dedicated to the 100th anniversary of N. A. Shanin)
Санкт-Петебрург, 23–26 мая 2019 г.

— Секционный доклад
Название: Modal bilattice logic as the fusion of K with itself
Одиннадцатые Смирновские чтения по логике
Москва, 19–21 июня 2019 г.

— Секционный доклад
Название: Modal bilattice logic as the fusion of K with itself
Мальцевские чтения 2019
Новосибирск, 19–23 августа 2019 г.

— Приглашённый пленарный доклад
Название: On negation as a modal operator in a quantified setting
Workshop on Proof Theory, Modal Logic and Reflection Principles 2019
(также известный как The Fifth International Wormshop)
Барселона, Испания, 5–8 ноября 2019 г.

— Приглашённый пленарный доклад
Название: Došen-style and Routley-style semantics for negation in a quantified setting
A Workshop on FDE-Based Modal Logics
Бохум, Германия, 28 ноября 2019 г.

— Приглашённый «ключевой» доклад
Название: A modal framework for reasoning about arbitrary natural numbers
Conference for Philosophy of Science and Formal Methods in Philosophy 2019
of the Polish Association for Logic and Philosophy of Science
Гданьск, Польша, 4–8 декабря 2019 г.

Кроме того, в качестве слушателя я посетил The Fifth Workshop on Connexive Logics, который прошёл 29 ноября в Бохуме.

Организационная деятельность

В этом году я занимался следующей организационной деятельностью.

— Член Программного и Организационного комитетов
St. Petersburg Days of Logic and Computability IV
(dedicated to the 100th anniversary of N. A. Shanin)
Санкт-Петебруг, Россия, 23–26 мая 2019 г.

— Сопредседатель (вместе с Л. Д. Беклемишевым)
Организационных комитетов
Logical Perspectives 2020 и
Logical Perspectives Summer School and Workshop 2020
Москва, Россия, 8–12 июня и 15–19 июня 2020 г.

— Сопредседатель (вместе с Л. Д. Беклемишевым)
Программного комитета
Logical Perspectives 2020
Москва, Россия, 8–12 июня 2020 г.

— Сопредседатель (вместе с М. Баазом, Л. Д. Беклемишевым и А. Щедровым)
Программного комитета
Logical Perspectives Summer School and Workshop 2020
Москва, Россия, 15–19 июня 2020 г.

Кроме того, я руковожу «Логическим семинаром» при Санкт-Петербургском отделении Математического института им. В. А. Стеклова РАН.

Педагогическая деятельность

В этом году я преподавал следующие курсы на факультете математики и компьютерных наук (сокращённо ФМКН) Санкт-Петербургского государственного университета.

— Математическая логика I

- Весна 2019: лекции + практические занятия у 3 групп

— Математическая логика II

- Осень 2019: лекции + практические занятия у 2 групп

— Основы теории множеств

- Осень 2019: лекции + практические занятия у 4 групп

При этом курсы «Математическая логика II» и «Основы теории множеств» были обновлены и существенно переработаны.

Кроме того, я руковожу научной работой двух студентов 2 курса ФМКН СПбГУ.

Список литературы

[1] Cabalar, P., Odintsov, S. P., and Pearce, D. (2006). Logical foundations of well-founded semantics. In Doherty, P., Mylopoulos, J., and Welty, C., editors. *Proceedings of the Tenth International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR 2006).* AAAI Press, 25–36.

[2] Fitting, M. (1989). Bilattices and the theory of truth. *Journal of Philosophical Logic* 18(3), 225–256.

[3] Fitting, M. (1991). Bilattices and the semantics of logic programming. *Journal of Logic Programming* 11(2), 91–116.

[4] Gabbay, D. M., Shehtman, V. B., and Skvortsov, D. P. (2009). *Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1.* Elsevier.

[5] Gabbay, D. M. and Wansing, H. (1999). *What is Negation*? Springer.

[6] Ginsberg, M. L. (1988). Multivalued logics: A uniform approach to inference in artificial intelligence. *Computational Intelligence* 4(3), 256–316.

[7] van Gelder, A., Ross, K. A., and Schlipf, J. S. (1991). The well-founded semantics for general logic programs. *Journal of the ACM* 38(3), 620–650.

[8] Jung, A. and Rivieccio, U. (2013). Kripke semantics for modal bilattice logic. In *Proceedings of the 28th Annual ACM/IEEE Symposium on Logic in Computer Science.* IEEE Computer Society Press, 438–447.

[9] Kanovich, M., Kuznetsov, S., Nigam, V., and Scedrov, A. (2018). Subexponentials in non-commutative linear logic. *Mathematical Structures in Computer Science.* Published online. 33 pp.

[10] Kanovich, M., Kuznetsov, S., Nigam, V., and Scedrov, A. (2018). A logical framework with commutative and non-commutative subexponentials. *LNCS* 10900 (LNAI), Springer, 228–245.

[11] Leitgeb, H. (2019). HYPE: A system of hyperintensional logic (with an application to semantic paradoxes). *Journal of Philosophical Logic* 48(2), 305–405.

[12] Nigam, V. and Miller, D. (2009). Algorithmic specifications in linear logic with subexponentials. In: *Proceedings of the 11th ACM SIGPLAN Conference on Principles and Practice of Declarative Programming* (*PPDP 2009*), ACM, 129–140.

[13] Odintsov, S. P. and Latkin, E. I. BK-lattices. Algebraic semantics for Belnapian modal logics. *Studia Logica* 100(1–2), 319–338.

[14] Odintsov, S. P. and Speranski, S. O. (2016). The lattice of Belnapian modal logics: Special extensions and counterparts. *Logic and Logical Philosophy* 25(1), 3–33.

[15] Odintsov, S. P. and Speranski, S. O. (2019). Belnap–Dunn modal logics: Truth constants vs. truth values. *Review of Symbolic Logic.* Published online. 21 pp.

[16] Odintsov, S. P. (2010). Combining intuitionistic connectives and Routley negation. *Siberian Electronic Mathematical Reports* 7, 21–41.

[17] Odintsov, S. P. and Wansing, H. (2010). Modal logics with Belnapian truth values. *Journal of Applied Non-Classical Logics* 20(3), 279–301.

[18] Odintsov, S. P. and Wansing, H. (2019). Routley star and hyperintentionality. Manuscript.

[19] Rivieccio, U., Jung, A. and Jansana, R. (2017). Four-valued modal logic: Kripke semantics and duality. *Journal of Logic and Computation* 27(1), 155–199.

[20] Routley, R. and Routley, V. (1972). The semantics of first degree entailment. *Noûs* 6(4), 335–359.

[21] Speranski, S. O. (2013). On Belnapian modal algebras: representations, homomorphisms, congruences, and so on. *Siberian Electronic Mathematical Reports* 10, 517–534.

[22] Speranski, S. O. (2017). Notes on the computational aspects of Kripke's theory of truth. *Studia Logica* 105(2), 407–429.