Отчет о научной и педагогической деятельности за 2018 год
Тараненко Анны Александровны

1. Научные результаты

1.1. Экстремальные многомерные матрицы

Полиплексом назовем неотрицательную матрицу, у которой сумма элементов в каждой линии не больше 1. Сумму всех элементов полиплексов назовем его весом. Полиплекс, вес которого равен его порядку, будем называть полидиагалью.

Экстремальная матрица A – это такая $(0,1)$-матрица, что ее носитель не содержит носителя никакой полидиагонали, но при замене любого нулевого элемента A на единичный в носителе результирующей матрицы найдется полидиагональ. Дефицитом $\delta > 0$ экстремальной матрицы назовем разницу между ее порядком и максимальным весом полиплекса, содержащегося в ее носителе.

Будем говорить, что многомерная $(0,1)$-матрица диагонально экстремальная, если в ней нет единичной диагонали, но при замене любого ее нулевого элемента на единицу возникает единичная диагональ.

Покрытие гипергранями многомерной $(0,1)$-матрицы A есть такое назначение назначение неотрицательных весов для каждой из гиперграней, для любого единичного элемента матрицы A сумма весов содержащих его гиперграней не меньше 1. Весом покрытия назовем сумму всех весов гиперграней; покрытие назовем оптимальным для матрицы A, если оно имеет минимальный вес среди всех покрытий гипергранями.

Теорема Кёнига–Холла для двумерных $(0,1)$-матриц эквивалентна полному описанию матриц, экстремальных для полиплексов фиксированного веса, причем это описание осуществляется в терминах их оптимальных покрытий. На пути к эффективному описанию экстремальных многомерных матриц мною в этом году сделано следующее:

1. Доказано, что если дефицит δ экстремальной матрицы не меньше $1/3$, то он равен 1, $1/2$ или $1/3$. С помощью оптимальных покрытий гипергранями охарактеризованы все экстремальные матрицы с дефицитом 1 и $1/2$ и доказано, что все они диагонально экстремальные.

2. Получена серия условий необходимых для того, чтобы покрытие гипергранями задавало экстремальную матрицу.

3. Предложены четыре рекурсивные конструкции построения экстремальных матриц большей размерности или порядка по данной экстремальной матрице. Описаны экстремальные матрицы, элементы оптимального покрытия гипергранями которых принимают лишь два значения, доказана диагональная экстремальность таких матриц.

4. Для экстремальных матрицы порядка 2 также доказана диагональная экстремальность и предложена дополнительная рекурсивная конструкция построения экстремальных матриц большей размерности.

5. Перечислены все экстремальные матрицы малых порядков и размерностей.

6. На основании полученных результатов и примеров выдвинуты следующие оригинальные гипотезы: существует взаимно однозначного соответствие между экстремальными матрицами и их оптимальными покрытиями; дефицит δ любой экстремальной матрицы равен $1/m$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$; любая экстремальная матрица диагонально экстремальна. Проанализированы связи этих гипотез с задачами линейного программирования и дискретной математики.

1.2. Полистохастические матрицы порядка и размерности 4

Многомерная неотрицательная матрица называется полистохастической, если сумма элементов в любой ее одномерной грани равна 1. Перманент многомерной матрицы A есть

$$\mathrm{per}A = \sum_{p \in D(A)} \prod_{\alpha \in p} a_\alpha,$$

где $D(A)$ – множество всех диагоналей в матрице A.

В этом году мною доказана следующая

Теорема. *Перманент любой* 4*-мерной полистохастической матрицы порядка* 4 *больше нуля.*

Данная теорема дает новый случай подтверждения гипотезы о положительности перманента любой полистохастической матрицы четной размерности или нечетного порядка из работы [1].

1.3. Совершенные структуры

Совместно с С. В. Агустиновичем начата работа по сведению результатов и методов изучения совершенных раскрасок, совершенных кодов и собственных функций в графах в общую теорию совершенных структур.

Совершенной структурой назовем тройку матриц (M, P, S), связанных соотношением $MP = PS$, где квадратная матрица M – матрица смежности графа, P – некоторая прямоугольная матрица, а квадратная матрица S есть матрица параметров совершенной структуры.

В результате получены единообразные доказательства для базовых свойств различных совершенных структур и серия теорем о построении совершенных структур в произведениях графов. Работа готовится к публикации.

2. Дальнейшие планы

1. Использовать полученные результаты по матрицам, экстремальным для полиплексов, для исследования k-плексов и k-перманентов матриц с клетчатой структурой. В качестве одного из многомерных обобщений теоремы Биркгофа изучить углы многогранника полиплексов.

2. Получить аналоги основных результатов теории регулярности гиперграфов для многомерных матриц.

3. Продолжить исследования о положительности перманента многомерных матриц, о числе трансверсалей в различных классах латинских квадратов и гиперкубов.

4. Продолжить начатую в этом году работу по исследованию совершенных структур.

3. Публикации

3.1. Препринты и поданные в печать статьи

1. A. A. Taranenko, On the König–Hall–Egerváry theorem for multidimensional matrices and multipartite hypergraphs. Подано в *Combinatorica*. Препринт доступен на ArXiv:1811.09981.

2. A. A. Taranenko, Positiveness of the permanent of 4-dimensional polystochastic matrices of order 4. Подано в *Discrete Applied Mathematices*. Препринт доступен на ArXiv:1801.10306.

3.2. Опубликованные в этом году статьи

1. A. A. Taranenko, Transversals in completely reducible multiary quasigroups and in multiary quasigroups of order 4, *Discrete Math.*, **341**, 405–420, 2018.

2. A. A. Taranenko, Transversals, plexes, and multiplexes in iterated quasigroups, *Electron. J. Combin.*, **25**(4), #P4.30, 2018.

4. Участие в конференциях

4.1. Доклады

1. Доклад «Multidimensional analogues of the Birkhoff and the König–Hall theorems for polyplexes» на *Workshop on graphs, networks and their applications*. (14–16 мая, 2018. Москва).

2. Доклад «Some results on positiveness of the permanent of polystochastic matrices» на *2nd Russian-Hungarian Combinatorial Workshop*. (27–29 июня, 2018. Будапешт, Венгрия).

3. Постерный доклад «Counting transversals and plexes in iterated latin hypercubes» на *International Congress of Mathematicians 2018*. (1–9 августа, 2018. Рио-де-Жанейро, Бразилия).

4. Доклад «On the numbers of transversals and multiplexes in iterated quasigroups» на *International Conference and PhD-Master Summer School on Graphs and Groups, Representations and Relations*. (6–19 августа, 2018. Новосибирск).

4.2. Участие на конференциях в качестве слушателя

1. *15th Workshop on Algorithms and Models for the Web Graph.* (17–18 мая, 2018. Москва).
2. *Building Bridges II.* (2–6 июля, 2018. Будапешт, Венгрия).

5. Педагогическая деятельность

1. Проведение в весеннем семестре 2017–2018 учебного года спецсеминара «Введение в дискретную математику» кафедры теоретической кибернетики ММФ НГУ.
2. Участие в судействе командных выездных соревнований школьников по решению учебно-исследовательских математических задач «Летний математический РИНРУТ 2018» (21–24 июня, 2018) и «Зимний математический РИНРУТ 2018» (29–30 декабря, 2018).

Список литературы

[1] **А. А. Тараненко,** Перманенты многомерных матриц: свойства и приложения, *Дискр. анал. и исслед. опер.*, **23**(4), 35–101, 2016.