Отчет о научной и педагогической деятельности за 2020 год
Тараненко Анны Александровны

1. Научные результаты

1.1. Асимптотика числа трансверсалей в итерированных группах и квазигруппах

Работы по данному направлению были начаты в прошлом году и в [4]. В текущем году получены существенные продвижения, статья подана в печать.

Пусть $G = (X, *)$, где $|X| = n$, – бинарная квазигруппа порядка n. d-итерированной квазигруппой назовем $(d+1)$-арную квазигруппу $G[d]$ такую, что

$$G[d](x_1, \ldots, x_{d+1}) = x_{d+2} \Leftrightarrow (\cdots (x_1 * x_2) * \cdots * x_d) * x_{d+1} = x_{d+2}.$$

Таблица Кэли любой d-арной квазигруппы порядка n представляет собой d-мерный латинский гиперкуб того же порядка.

Трансверсалью в d-мерном латинском гиперкубе порядка n (или в d-арной квазигруппе) называется набор из n элементов гиперкуба, расположенных на максимальном расстоянии (расстоянии d) друг от друга и заполненных всеми n различными символами гиперкуба.

Широко известная гипотеза Холла и Пейджа [3] утверждает, что в (двумерной) таблице Кэли группы G существует трансверсаль тогда и только тогда, когда все нетривиальные силовские 2-подгруппы G не являются циклическими. Справедливость данной гипотезы установлена в 2009 году в работах [2, 7].

В этом году S. Eberhard, F. Manners, R. Mrazović разместили препринт [1], где доказали, что если группа G порядка n удовлетворяет условию Холла и Пейджа, то число трансверсалей в ее таблице Кэли есть $\frac{n!}{|G'|n^{n-1}} n!(e^{-1/2} + o(1))$ при $n \to \infty$, где G' – коммутант группы G.

В моих исследованиях независимо получено продолжение этого результата на случай итерированных групп и квазигрупп растущей арности, а также разработан метод нахождения асимптотик для широкого класса подструктур в таких латинских гиперкубах. В частности, доказано следующее.

1. Если группа G удовлетворяет условию гипотезы Холла и Пейджа, то все d-итерированные группы $G[d]$ содержат трансверсаль, иначе $G[d]$ содержит трансверсаль тогда и только тогда, когда d четно. При этом, если число трансверсалей $T(d)$ в итерированной группе $G[d]$ отлично от нуля, то для достаточно больших d оно ведет себя как $\frac{n!}{|G'|n^{n-1}} n!^d (1 + o(1))$, где n – порядок группы G, а G' – ее коммутант.

2. Для произвольной квазигруппы G порядка n существует d_0, начиная с которого либо все d-итерированные квазигруппы $G[d]$ содержат трансверсаль, либо $G[d]$ содержит трансверсаль тогда и только тогда, когда d четно.

При этом существует целое число r, $1 \le r \le n$, такое, что если число трансверсалей $T(d)$ в $G[d]$ отлично от нуля, то для достаточно больших d оно ведет себя как $\frac{n!}{rn^{n-1}}n!^d(1+o(1))$.

3. Доказано, что для любой квазигруппы G порядка n существует такое d_0, что для всех $d \ge d_0$ итерированная квазигруппа $G[d]$ содержит частичную трансверсаль длины $n-1$. Асимптотики числа частичных трансверсалей длины $n-1$ находится по формулам, сходных с формулами для числа трансверсалей.

1.2. Произведения многомерных матриц и перманент

Массив $A = (a_\alpha)$, где $a_\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d)$, $\alpha_i \in \{1, \ldots, n\}$, называется d-мерной матрицей порядка n. Перманент многомерной матрицы A есть

$$\mathrm{per}A = \sum_{l} \prod_{\alpha \in l} a_\alpha,$$

где суммирование ведется по всем диагоналям l матрицы A, то есть таким наборам $(\alpha^1, \ldots, \alpha^n)$, что расстояние Хэмминга между любой парой индексов α^i и α^j максимально.

Для многомерных матриц A и B подходящих порядков и размерности вводится несколько произведений: кронекерово $A \otimes B$, внешнее $A \cdot B$, композиция AB.

Проведено изучение базовых свойств произведений многомерных матриц (ассоциативности, коммутативности, дистрибутивности), а также рассмотрено взаимодействие произведений с функцией перманента. Например, доказано, что перманент $\mathrm{per}(A \times B)$ внешнего произведения матриц A и B порядка n равен $n!(\mathrm{perA} \cdot \mathrm{perB})$, а перманент композиции AB неотрицательных матриц не меньше, чем $\mathrm{perA} \cdot \mathrm{perB}$. Кроме того, замечено, что операция композиции квазигрупп (и соответствующих им многомерных перестановок) находится во взаимно однозначном соответствии с композицией многомерных матриц.

Исследования по данной теме связаны с проблемой поиска необходимых и достаточных условий положительности перманента многомерных неотрицательных матриц и их планируется продолжить в будущем.

1.3. Совершенные структуры и раскраски

Совершенной структурой назовем тройку матриц (M, P, S) согласованных размеров, связанных соотношением $MP = PS$, где квадратная матрица M – матрица смежности графа, P – некоторая прямоугольная матрица, а квадратная матрица S есть матрица параметров совершенной структуры. Одним из известных примеров совершенных структур являются совершенные раскраски. Раскраска вершин графа называется совершенной, если цветовой состав окрестности каждой вершины однозначно определяется ее цветом.

В этом году была закончена подготовка к публикации начатой в прошлом году статьи по совершенным 2-раскраскам графа Хэмминга и продолжена работа по систематизации свойств совершенных структур и раскрасок. Кроме того, получено несколько новых результатов.

1. Доказано, что L_1-расстояние между двумя строками матрицы параметров любой совершенной раскраски не превосходит L_1-расстояния между двумя строками матрицы смежности, соответствующих вершинам этих цветов.

2. Понятия совершенных раскрасок и структур расширены с графов на однородные гиперграфы. На основе одного из известных подходов к определению спектра многомерных матриц доказано, что спектр матрицы параметров совершенной структуры в гиперграфе содержится в спектре его матрицы смежности.

2. Публикации

2.1. Препринты и поданные в печать статьи

1. A. A. Taranenko, On the König–Hall–Egerváry theorem for multidimensional matrices and multipartite hypergraphs. Подано в *Discrete Mathematics*. Препринт доступен на ArXiv:1811.09981.

2. A. A. Taranenko, Regularity and counting lemmas for multidimensional matrices. Подано в *Discrete Mathematics*. Препринт доступен на ArXiv:1909.04858.

3. E. A. Bespalov, D. S. Krotov, A. A. Matiushev, A. A. Taranenko, K. V. Vorob'ev, Perfect 2-colorings of Hamming graphs. Подано в *Journal of Combinatorial Designs*. Препринт доступен на ArXiv:1911.13151.

4. A. A. Taranenko, Transversals, near transversals, and diagonals in iterated groups and quasigroups. Подано в *Electronic Journal of Combinatorics*. Препринт доступен на ArXiv:2006.03786.

2.2. Опубликованные в этом году статьи

1. A. A. Taranenko, Positiveness of the permanent of 4-dimensional polystochastic matrices of order 4 // Discrete Appl. Math. — 2020. — V. 276. — P. 161–165. — DOI: 10.1016/j.dam. 2019.02.001.

2. A. A. Taranenko, Algebraic properties of perfect structures // Linear Alg. Appl. — 2020. — V. 607. — P. 286–306. — DOI: 10.1016/j.laa.2020.08.012.

3. Доклады на конференциях

1. Доклад «Hypergraph matching problems and multidimensional matrices» на *“Combinatorics and geometry days II” at MIPT*. (13–16 апреля, 2020. Москва, онлайн).

2. Доклад «On perfect 2-colorings of Hamming graphs» на *Ural Workshop on Group Theory and Combinatorics*. (24–30 августа, 2020. Екатеринбург, онлайн).

4. Педагогическая и другая деятельность

1. Проведение в весеннем семестре 2019–2020 учебного года спецсеминара «Введение в дискретную математику» кафедры теоретической кибернетики ММФ НГУ.

2. Курирование проекта “Совершенные структуры и дизайны” на первом воркшопе Математического центра в Академгородке (13 июля – 15 августа, 2020).

3. Участие в работе воркшопа по открытым проблемам в комбинаторике и геометрии II (Адыгея, 28 сентября – 4 октября, 2020).

4. Участие в организации и судействе онлайн соревнований школьников по решению исследовательских математических задач «Зимний математический РИНРУТ 2020» (24–27 декабря, 2020).

5. Участие в организации и судействе дистанционных командных соревнований школьников по решению исследовательских задач «Весенний Математический Марафон – 2020» (март – май, 2020) и «Осенний Математический Марафон – 2020» (октябрь – декабрь, 2020).

Итоги за 2018-2020 гг. и сравнение с заявкой

В заявке на проект были поставлены следующие задачи.

1. *Исследовать трансверсали и k-плексы латинских гиперкубов, которые являются таблицами Кэли итерированных квазигрупп G. Доказать, что все такие латинские гиперкубы нечетной размерности содержат трансверсаль. Установить существование константы $c(G)$ для которой, если число трансверсалей в d-мерной таблице Кэли итерированной квазигруппы G отлично от нуля, то для больших d оно асимптотически равно $c(G)n!^{d-1}$, где n – порядок квазигруппы G. Аналогичного типа результаты получить для числа k-плексов и частичных трансверсалей в латинских гиперкубах.*

Поставленная задача решена даже в большем объеме, чем предполагалось изначально. Для итерированных групп установлен точный вид константы $c(G)$ в зависимости от свойств группы G, а для произвольных итерированных квазигрупп получилось сузить разнообразие значения константы до конечного множества. Результаты исследований изложены в статье [4] и в поданном в этом году в печать препринте.

2. *Исследовать свойства k-перманентов и матриц с клетчатой структурой.*

Задача о k-перманентах трансформировались в изучение полиплексов и многомерных матриц, экстремальных для наличия полидиагонали, которые связаны с одним из многомерных обобщений теоремы Кёнига–Холла. В 2018 г. мною была подготовлена и подана в печать статья с полученными по этому направлению результатами.

Для k-перманентов матриц с клетчатой структурой также есть некоторые наблюдения, но они пока не представляются мне достаточно интересными и завершенными для того, чтобы их публиковать. Объекты с клетчатым строением продолжают периодически возникать в моих исследованиях и, вполне возможно, что они войдут в одну из будущих работ.

3. *Доказать или опровергнуть утверждение о том, что перманент любой полистохастической матрицы порядка 4 и четной размерности положителен.*

В статье [5] установлено, что перманент любой 4-мерной полистохастической матрицы порядка 4 положителен. Для матриц порядка 4 и произвольной четной размерности вопрос по-прежнему открыт.

Основные цели и направления исследования, поставленные в заявке этого проекта, заключались в следующем:

1. *Развить методы для доказательства существования и оценки числа 1-факторов гиперграфов на область многомерных матриц и их перманентов с последующим применением для других классов комбинаторных структур.*

В 2019 г. подготовлена и подана в печать статья, в которой широко известные для графов леммы о регулярности и о подсчетах были адаптированы для многомерных матриц.

Кроме того, в опубликованной статье [4] и в ее продолжении в этом году исследованы перманенты многомерных матриц специального типа. Это позволило доказать существование трансверсалей и найти асимптотику их числа в латинских гиперкубах, которые являются таблицами Кэли итерированных групп или квазигрупп.

2. *Найти обобщения на многомерный случай теорем Кёнига–Холла и гипотезы ван дер Вардена для дважды стохастических матриц и изучить свойства перманентов полистохастических матриц.*

В 2018 г. был предложен способ обобщить теорему Кёнига–Холла на многомерные матрицы путём описания матриц, экстремальных для содержания полидиагонали. Для 4-мерных полистохастических матриц порядка 4 в статье [5] доказано, что их перманент положителен.

В дополнение к заявленным направлениям, проводилось изучение совершенных структур и раскрасок. Так в статье [6] описаны основные алгебраические свойства совершенных структур и исследованы совершенные структуры в произведениях графов. Кроме того, в 2019 г. совместно с соавторами были проанализированы параметры, при которых существуют совершенные (b, c)-раскраски в графах Хэмминга $H(n, q)$.

Таким образом, за прошедшие три года мною опубликованы 3 статьи и подано в печать еще 4 работы.

Каждый год я проводила весенний семестр спецсеминара “Введение в дискретную математику” в НГУ и регулярно принимала участие в организации нескольких математических соревнований для школьников.

Список литературы

[1] S. Eberhard, F. Manners, and R. Mrazović, *An asymptotic for the Hall–Paige conjecture*, available at `https://arxiv.org/abs/2003.01798`.

[2] A. B. Evans, *The admissibility of sporadic simple groups*, J. Algebra **321** (2009), no. 1, 105–116, DOI 10.1016/j.jalgebra.2008.09.028.

[3] M. Hall and L. J. Paige, *Complete mappings of finite groups*, Pacific J. Math. **5** (1955), 541–549.

[4] A. A. Taranenko, *Transversals, plexes, and multiplexes in iterated quasigroups*, Electron. J. Combin. **25** (2018), no. 4, Paper 4.30, 17.

[5] A. A. Taranenko, *Positiveness of the permanent of* 4*-dimensional polystochastic matrices of order* 4, Discrete Appl. Math. **276** (2020), 161–165, DOI 10.1016/j.dam. 2019.02.001.

[6] A. A. Taranenko, *Algebraic properties of perfect structures*, Linear Algebra Appl. **607** (2020), 286–306, DOI 10.1016/j.laa.2020.08.012.

[7] S. Wilcox, *Reduction of the Hall-Paige conjecture to sporadic simple groups*, J. Algebra **321** (2009), no. 5, 1407–1428, DOI 10.1016/j.jalgebra.2008.11.033.