Отчёт о научной и педагогической работе за третий год гранта "Молодая математика России 2021"

Ю. Белов

1. Результаты, полученные в 2021-м году

В 2021-м году я продолжил изучение фреймов Габора для рациональных функций. Также удалось получить результаты о подпространствах $L^2(\mathbb{R})$ инвариантных относительно целочисленных сдвигов, порожденных гауссовскими функциями, и свойствах цепочек из подпространств в пространствах де Бранжа.

1.1. **Фреймы Габора.** В 2021-м году была закончена работа над препринтом "Gabor frames for rational functions" [4] и продолжены исследования в этом направлении. Напомним основные определения анализа Габора. Пусть функция g принадлежит пространству $L^2(\mathbb{R})$. Для каждой прямоугольной решетки $\alpha\mathbb{Z}\times\beta\mathbb{Z}$ рассмотрим *систему Габора* $\mathcal{G}(g,\alpha,\beta)$, $\alpha,\beta>0$, связанную с этой решеткой

$$\mathcal{G}(g,\alpha,\beta):=\{e^{2\pi i\alpha m x}g(x-\beta n)\}_{m,n\in\mathbb{Z}}=\{g_{m,n}\}_{m,n\in\mathbb{Z}}.$$

Таким образом, система Габора – это система частотно-временных сдвигов фиксированной функции. Главный вопрос теории фреймов Габора – для данной функции g описать фрейм множество $\mathfrak{F}$, т.е. множество пар параметров (α,β), для которых система Габора образует фрейм:

$$A\|f\|_2^2\le\sum_{m,n\in\mathbb{Z}}|(f,g_{m,n})|^2\le B\|f\|_2^2,\qquad \text{для любой функции } f\in L^2(\mathbb{R}).$$

Другой важный вопрос - описание нерегулярных фреймов

$$\mathcal{G}(g,\Lambda):=\{e^{2\pi i\omega x}g(x-t)\}_{(\omega,t)\in\Lambda},\quad \Lambda\subset\mathbb{R}^2.$$

Полное описание нерегулярных фреймов известно только лишь для гауссовской функции $e^{-\pi x^2}$ (ее растяжений и частотно-временных сдвигов). Этот результат был получен К. Сейпом в 1992-м году. Для других оконных функций известны только частичные результаты для множеств вида $\Lambda\times\mathbb{Z}$. Мне (совместно с Ю.И. Любарским и А.И. Куликовым) удалось получить полное описание нерегулярных прямоугольных фреймов (т.е. множеств вида $M\times\Gamma$, $M,\Gamma\subset\mathbb{R}$) для ядра Коши $\dfrac{1}{x-iw}$, $w\notin i\mathbb{R}$. За исключением гауссовской функции, результатов такого рода ранее известно не было. Для регулярных прямоугольных решеток и ядра Коши полное описание было получено А. Янссеном в 1996-м году.

Определение 1. *Мы будем говорить, что множество* $M=\{\mu_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $...\mu_0<\mu_1<...$, *локально конечно если*

$$\sup_n(\mu_{n+1}-\mu_n)<\infty \text{ и } \beta(M):=\sup_x\#\{M\cap[x,x+1]\}<\infty.$$

Теорема 1. *Пусть* $\Gamma \subset \mathbb{R}$ *и* $M \subset \mathbb{R}$. *Следующие два утверждения эквивалентны:*

(1) M *локально конечное множество, а* Γ *множество сэмплинга для пространства Пэли-Винера* $PW_{[0,\beta(M)]}$*;*
(2) *система* $\mathcal{G}(g, \Gamma \times M)$ *порождает фрейм в* $L^2(\mathbb{R})$.

Отметим, что вещественные множества сэмплинга для пространств Пэли-Винера были описаны в знаменитой работе К. Сейпа и И. Ортега-Серды (Annals of Mathematics 2002). Описание фреймов в теореме 1 несимметрично относительно множеств M и Γ. Этот феномен имеет место из-за того, что преобразование Фурье ядра Коши очень сильно отличается от самого ядра Коши.

Теорема 1 опубликована в престижном журнале Applied and Computational Harmonic Analysis, см. [3].

Другое направление исследований – нахождение асимптотики нижней константы A во фрейм-неравенстве при стремлении параметров решетки к критической гиперболе (найти асимптотику верхней константы обычно не составляет труда). Ранее такого рода асимптотики были известны лишь для гауссиана и квадратной решетки $a\mathbb{Z} \times a\mathbb{Z}$, $a \to 1$ и для случая когда фрейм-неравенство выполнено и на критической гиперболе. Мне (совместно с Ю.И. Любарским и А.И. Куликовым) удалось найти асимптотики A для произвольных сумм двух ядер Коши. Оказалось, что для этого класса асимптотика может быть как полиномиальной, так и экспоненциальной. Полученные результаты готовятся к публикации.

1.2. **Неделимые интервалы и устойчивость экспоненциального типа.** В 2021-м году я (совместно с А.А. Боричевым) получил новые результаты о соответствии между спектральными данными и свойствами гамильтонианов канонических систем. Первый набор результатов относится к системам на конечном интервале. Напомним определения необходимые для формулировки этих результатов.

Для целой функции A вещественной на вещественной оси с нулями в $T = \operatorname{supp} \mu$ определим пространство де Бранжа $\mathcal{HC}(\mu)$:

$$\mathcal{HC}(\mu) = \mathcal{HC}(A, \mu) = \left\{ f(z) = A(z) \sum_{n \in \mathcal{N}} \frac{a_n \mu_n^{1/2}}{z - t_n} : \{a_n\}_{n \in \mathcal{N}} \in \ell^2 \right\}.$$

Мы будем изучать регулярные пространства де Бранжа (соответствующие каноническим системам на конечном интервале). Пусть H вещественная, суммируемая, почти везде неотрицательная 2×2 матричная функция (гамильтониан) на интервале $[0, L]$. Рассмотрим каноническую систему

$$JY'(t) = zH(t)Y(t), \qquad t \in [0, L], \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $z \in \mathbb{C}$ спектральный параметр, вектор-функция Y абсолютно непрерывна, $Y(0)^T = (0, 1)$ и $Y(L)^T = (A, B)$. Целые функции A и B вещественны на вещественной оси и имеют перемежающиеся нули. Пусть μ мера на множестве $\mathcal{Z}_A$ с нагрузками $B(t)/A'(t)$, $t \in \mathcal{Z}_A$. Тогда пространство $\mathcal{HC}(A, \mu)$ соответсвует канонической системе с гамильтонианом H. Подпространства де Бранжа пространства де Бранжа $\mathcal{HC}(A, \mu)$ упорядочены по включению. Каждое такое подпространство соответствует сужению гамильтониана на интервал $[0, s]$, $s \leq L$.

Одна из основных задач теории канонических систем – нахождение соответствий между свойствами канонических систем (гамильтонианов) и их спектральных параметров μ. Мы будем интересоваться наличием неделимых интервалов в гамильтониане (интервалов, для которых H это проектор на фиксированный вектор) при ограничениях на носитель меры μ.

Теорема 2. *Если* $\operatorname{supp}(\mu) = \mathbb{Z}$ *и пространство* $\mathcal{HC}(\mu)$ *регулярно, то цепочка подпространств де Бранжа* $\mathrm{Chain}(\mu)$ *может содержать неделимый интервал и не может содержать двух неделимых интервалов подряд.*

С другой стороны, неделимых интервалов для целочисленного спектра может быть сколь угодно много.

Теорема 3. *Пусть* Σ *не более чем счетное подмножество интервала* $(0, \pi)$. *Тогда существует мера* μ *с носителем* $\mathbb{Z}$ *такая, что пространство* $\mathcal{HC}(\mu)$ *регулярно, а цепочка подпространств* $\mathrm{Chain}(\mu)$ *содержит неделимые интервалы* J_s *такие, что* $\mathrm{Type}(\mathcal{HC}(\mu_t)) = s$, *для всех* $t \in J_s$, $s \in \Sigma$.

Также нам удалось показать, что для каждого экспоненциального типа есть не более одного интервала.

Теорема 4. *Пусть* ν *мера,* $\operatorname{supp} \nu = \mathbb{Z}$, *порождает регулярное пространство де Бранжа. Рассмотрим цепочку регулярных пространств де Бранжа* $\mathcal{H}_{t,\nu}$ *на интервале* $(0, L]$. *Тогда для любых* $0 < t_2 < t_1 \le L$ *таких, что* $\mathrm{Type}(\mathcal{H}_{t_1,\nu}) = \mathrm{Type}(\mathcal{H}_{t_2,\nu})$ *выполнено*

$$\dim(\mathcal{H}_{t_1,\nu} \ominus \mathcal{H}_{t_2,\nu}) \le 1.$$

Другой набор результатов о канонических системах относится к каноническим системам на полуоси. Нам удалось показать, что при некоторых условиях регулярности на вес $w(x)$ цепочка подпространств, порожденная весом $w(x)dx$ содержит не больше одного подпространства для каждого положительного экспоненциального типа.

Эти результаты о канонических системах вошли в препринт [7].

1.3. **Подпространства инвариантные относительно целочисленных сдвигов.** В 2021-и году я (совместно с А.Д. Барановым и К. Грохенигом) установил связь между подпространством $V^2(g)$ инвариантным относительно целочисленных сдвигов

$$V^2(g) = \{f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n g(x - n), (c_n) \in \ell^2\} \subset L^2(\mathbb{R}),$$

и малыми пространствами Фока, состоящими из целых функций. Эта связь позволила полностью описать полные интерполяционные подпространства в пространстве $V^2(g)$, где g - гауссовская функция.

Теорема 5. *Множество* $\Lambda \subset \mathbb{R}$ *это полное интерполяционное множество для* $V^2(e^{-ax^2})$ *тогда и только тогда, когда* $\Lambda = \{\lambda_n\}$ *может быть перенумеровано таким образом, что* $\lambda_n = n + \delta_n$ *и*

(1) $(\delta_n) \in \ell^\infty$;

(2) *существует* $N > 0$ *такое, что*

$$\sup_n \frac{1}{N} \left| \sum_{k=n}^{n+N-1} \delta_k \right| < \frac{1}{2}.$$

Отметим, что параметр a может принимать и комплексные значения, а описание полных интерполяционных последовательностей от него не зависит. Этот результат вошел в препринт [6].

1.4. **Другие результаты.** В 2021-м году я изучал базисы Рисса из экспонент на двух интервалах. В этом направлении получены первые предварительные результаты. Завершен процесс публикации обзорной работы [4]. Принята к печати работа [1], содержащая решение задачи Ньюмана–Шапиро.

2. Опубликованные и принятые в печать работы в 2021-м году:

[1] Y. Belov, A. Borichev, The Newman-Shapiro problem, https://arxiv.org/abs/1711.06901, to appear in Journal of the European Mathematical Society.

[2] A. Baranov, Y. Belov, A. Kulikov, Spectral synthesis for exponentials and logarithmic length, https://arxiv.org/abs/2010.13201, accepted for publication in Israel Journal of Mathematics.

[3] Y. Belov, A. Kulikov, Y. Lyubarskii, Irregular Gabor frames of Cauchy kernels, https://arxiv.org/abs/2104.01121, to appear in Applied and Computational Harmonic Analysis.

[4] Y.Belov, Geometric Properties of Reproducing Kernels in Hilbert Spaces of Entire Functions, Extended Abstracts Fall 2019, Part of the Trends in Mathematics book series (TM, volume 12) pp. 25–30.

3. Препринты:

[5] Y. Belov, A. Kulikov, Y. Lyubarskii, Gabor frames for rational functions, https://arxiv.org/abs/2103.08959.

[6] A.Baranov, Y. Belov, K. Gröchenig, Complete interpolating sequences for the Gaussian shift-invariant space, https://arxiv.org/abs/2112.01248.

[7] Y.Belov, A. Borichev, On the chain structure in the de Branges spaces, https://arxiv.org/abs/2112.03412.

4. Доклады на конференциях

Фреймы Габора для рациональных функций, Конференция международных математических центров мирового уровня, Сочи, 13 августа 2021 г.

On the chain structure of de Branges spaces, Дни анализа в Сириусе, Сочи, 25 октября 2021 г.

Gabor analysis for Cauchy kernel, Virtual Workshop “Complex Analysis and Geometry”, онлайн, 18 ноября 2021 г.

Gabor analysis for rational functions, Совместный общематематический семинар СПбГУ и Пекинского Университета, онлайн, 2 декабря 2021 г.

5. Организационная, административная и педагогическая деятельность

В 2021-м году под моим руководством были защищены три магистерские выпускные работы. В лаборатории им П.Л. Чебышева я руковожу семинаром по комплексному анализу. Мой студент А.И. Куликов получил премию молодым математикам России, учрежденной Образовательным центром «Сириус». Организовал конференцию Probabilistic Techniques in Analysis: Spaces of Holomorphic Functions 6-10 декабря, Сочи, центр Сириус, и миниконференцию «Complex and Harmonic Analysis and its applications», 23-26 ноября, С.-Петербург.

Являюсь членом Организационного комитета по подготовке Международного математического конгресса математиков в 2022-м году.

6. Результаты за три года и сравнение с заявкой

За три года удалось получить оценки константы синтезируемости для экспоненциальных систем на конечном интервале. Также удалось показать, что биортогональная система (к полной и минимальной системе экспонент в $L^2(E)$) полна, если E – объединение не более чем трех интервалов. Несмотря на большие усилия, не удалось получить содержательных результатов о свойстве N-аппроксимации. Видимо, для продвижения в этом направлении требуется привлечение новых идей и подходов.

С другой стороны, удалось разработать математический аппарат, при помощи которого удалось доказать ряд результатов в анализе Габора для рациональных функций. Мне кажется, что этот аппарат найдет свое применение и для других оконных функций. Также удалось получить новый неожиданный результат [9] для такого классического объекта как гауссова система Габора.

Еще одно направление моей деятельности – подпространства пространств фоковского типа, инвариантные относительно деления. В этом направлении удалось получить результаты об упорядоченности таких подпространств при некоторых условиях на вес [8]. С другой стороны, в общем случае упорядоченности подпространств нет.

7. Опубликованные и принятые в печать работы в 2019-2020-х годах:

[8] A. Aleman, A. Baranov, Y. Belov, H. Hedenmalm, Backward shift and nearly invariant subspaces of Fock-type spaces, https://arxiv.org/abs/2007.06107, to appear in International Mathematics Research Notices.

[9] Y. Belov, A. Borichev, A. Kuznetsov, Upper and lower densities of Gabor Gaussian systems, 2020, Applied and Computational Harmonic Analysis, 49, n. 2., pp. 438–450.

[10] Y. Belov, A. Borichev, K. Fedorovskiy, Nevanlinna domains with large boundaries, 2019, Journal of Functional Analysis 277(8), pp. 2617–2643.

[11] E. Abakumov, E., A. Baranov, Y. Belov, Krein-type theorems and ordered structure for Cauchy–de Branges spaces, 2019, Journal of Functional Analysis, 277(1), pp. 200-226.

[12] A. Baranov, Y. Belov, Synthesizable differentiation-invariant subspaces, 2019, Geometric and Functional Analysis, 29(1), pp. 44–71.

[13] E. Abakumov, A. Baranov, Y. Belov, 2019, Localization of Zeros in Cauchy–de Branges Spaces, Trends in Mathematics, Analysis of operators on function spaces, pp. 5–27.