

Конкурс «Молодая математика России» отчет Д.М. Ицыксона за 2021 год

1 Публикации

Работы опубликованные в журналах:

- [4] Dmitry Itsykson, Alexander Okhotin, Vsevolod Oparin: Computational and Proof Complexity of Partial String Avoidability. ACM Trans. Comput. Theory 13(1): 6:1-6:25 (2021)
- [1] Sam Buss, Dmitry Itsykson, Alexander Knop, Artur Riazanov, Dmitry Sokolov: Lower Bounds on OBDD Proofs with Several Orders. ACM Trans. Comput. Log. 22(4): 26:1-26:30 (2021)
- [6] Dmitry Itsykson, Artur Riazanov, Danil Sagunov, Petr Smirnov: Near-Optimal Lower Bounds on Regular Resolution Refutations of Tseitin Formulas for All Constant-Degree Graphs. Comput. Complex. 30(2): 13 (2021)

Работы, опубликованные в материалах рецензируемых конференций:

- [5] Dmitry Itsykson, Artur Riazanov: Proof Complexity of Natural Formulas via Communication Arguments. Computational Complexity Conference 2021: 3:1-3:34

2 Участие в конференциях

- Computational Complexity Conference 2021, 20-22 июля, online, доклад Proof Complexity of Natural Formulas via Communication Arguments.
- SAT/SMT solvers: Theory and Practice, 18-19 ноября 2021, Санкт-Петербург, доклад On OBDD solvers and proof systems.
- Problems in Theoretical Computer Science 2021, 10-12 декабря, НИУ ВШЭ, Москва, доклад Proof Complexity of Natural Formulas via Communication Arguments.

3 Педагогическая деятельность

В СПбГУ на факультете математики и компьютерных наук в весеннем семестре 2021-го года я прочитал курс лекций «Вероятностные методы в вычислениях», в осеннем семестре 2021-го года я прочитал курсы лекций «Теоретическая информатика» и «Теория информации». Также я прочитал курс лекций «Теория сложности вычислений» в Computer Science клубе в Санкт-Петербурге, курс читался online.

В настоящее время я руковожу тремя аспирантами (А.А. Рязановым, С.И. Грязновым и П.Ю. Смирнов) и являюсь scientific host постдока Михала Гарлика.

4 Полученные результаты

4.1 Точные оценки сложности цейтинской формулы в системе OBDD(\wedge , reordering)

Сложность вывода цейтинских формул в системе доказательств OBDD(\wedge , reordering) ранее изучалась в работах [3] и [2]. В работе [3] была получена экспоненциальная нижняя оценка на сложность вывода цейтинских формул, если граф является достаточно хорошим спектральным экспандером.

В работе [2] было доказано, что для произвольного графа G размер любого OBDD(\wedge , reordering) опровержения невыполнимой цейтинской формулы $T(G, f)$ не меньше, чем $2^{\Omega(\text{tw}(G)^\delta)}$, где δ — это константа из теоремы о миноре-сетке. На сегодняшний день известно, что $\delta \geq \frac{1}{10}$, но также известно, что $\delta \leq \frac{1}{2}$. Этот результат был улучшен и доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. Размер любого OBDD(\wedge , reordering) опровержения невыполнимой цейтинской формулы $T(G, f)$ не меньше, чем $2^{\Omega(\text{tw}(G))}$.

Эта оценка точная с точностью до константы в экспоненте.

4.2 Нижняя оценка на время работы OBDD(\wedge , reordering, \exists)-алгоритмов на невыполнимых формулах

В 2004 году Пан и Варди [8] предложили подход к решению задачи выполнимости булевой формулы, основанной на OBDD и символьной элиминации кванторов. Мы называем такие алгоритмы OBDD(\wedge , \exists)-алгоритмами. Каждая формула в КНФ рассматривается как формула, у которой есть кванторы существования по всем переменным. Алгоритм выбирает порядок на переменных и создает OBDD D , которая изначально представляет функцию, которая тождественно равняется 1. Затем алгоритм загружает в D дизъюнкты КНФ по одному и применяет к D операцию проекции (элиминацию квантора существования) по переменной x , если все дизъюнкты, содержащие переменную x уже загружены. Мы рассматриваем обобщение таких алгоритмов, в котором алгоритмам также разрешено менять порядок переменных, который используется в D . Такие обобщенные алгоритмы мы называем OBDD(\wedge , \exists , reordering)-алгоритмами. Экспоненциальная нижняя оценка на время работы OBDD(\wedge , \exists)-алгоритмов на невыполнимых формулах следует из нижней оценки на сложность вывода в системе доказательств OBDD(\wedge , weakening) [7, 9]. В работе [3] было построено семейство *выполнимых* формул, на которых любой OBDD(\wedge , \exists , reordering)-алгоритм работает экспоненциальное время. Вопрос о нижней оценке на невыполнимых формулах оставался открытым. Доказана следующая теорема.

Теорема 4.2. Существует такая последовательность невыполнимых формул φ_n , размер которых ограничен полиномом от n , что время работы произвольного OBDD(\wedge , \exists , reordering)-алгоритма на формуле φ_n не меньше $2^{\Omega(n)}$.

Сегерлинд [9] доказал, что OBDD(\wedge , \exists)-алгоритмы не моделируют резолюцию. Этот результат был усилен и доказана следующая теорема.

Теорема 4.3. OBDD(\wedge , \exists , reordering)-алгоритмы как система доказательств не моделирует дравовидную резолюцию.

5 Подведение итогов за три года

В заявке были обозначены три направления исследования:

Сложность цейтинских формул для произвольного графа. В этом направлении предполагалось изучать сложность вывода цейтинских формул в зависимости от структурных свойств графа. В рамках этого направления было сделано все запланированное и даже больше:

- В системах Фреге глубины d доказано, что сложность цейтинской формулы $T(G, c)$ с точностью до применения квазиполинома равняется $2^{\text{tw}(G)^{1/d}} \text{poly}(|T(G, f)|)$.
- В регулярной резолюции доказана нижняя оценка $2^{\Omega(\text{tw}(G)/\log |V|)}$ на сложность вывода цейтинской формулы $T(G, c)$. В этом году де Колнет и Менгель [?], используя идеи нашего подхода, доказали нижнюю оценку $2^{\Omega(\text{tw}(G)/\Delta)}$, где Δ — максимальная степень вершин графа G .
- Доказана точная нижняя оценка $2^{\Omega(\text{tw}(G))}$ на сложность вывода цейтинской формулы $T(G, c)$ в системе доказательств $\text{OBDD}(\wedge, \text{reordering})$.

Нижняя оценка в OBDD системах доказательств с правилом смены порядка. Полностью решить задачу не удалось и вопрос о доказательстве нижней оценки в системах доказательств $\text{OBDD}(\wedge, \text{weakening}, \text{reordering})$ и $\text{OBDD}(\wedge, \exists, \text{reordering})$ пока остается открытым. Однако были получены частичные продвижения:

- Доказана экспоненциальная нижняя оценка на время работы $\text{OBDD}(\wedge, \exists, \text{reordering})$ -алгоритмов на невыполнимых формулах.
- Доказана экспоненциальная нижняя оценка на сложность вывода в системе доказательств $\text{OBDD}(\wedge, \exists_{cn}, \text{reordering})$, в которой правило проекции разрешено применять только к cn переменным, где n — число переменных в формуле, а $c < 1$ — константа.

Лифтинг с простым гаджетом. Третье направление связано с теоремой о dag-like лифтинге для гаджетов, зависящих от константного числа переменных. По этой задаче существенных продвижений получить не удалось. Интересные результаты получились пока только в древовидном случае для вероятностной коммуникационной сложности с k участниками в модели «числа на лбу». В работе [5] удалось использовать в качестве гаджета функцию четности, число аргументов которой совпадает с числом участников в коммуникационном протоколе. В результате получилось доказать нижнюю оценку на коммуникационную сложность задачи поиска опровергнутого дизъюнкта для формулы $\text{ВРНР}_{2^\ell}^{2^\ell+1}$ (битовый принцип Дирихле) без использования гаджета совсем.

Список литературы

- [1] Sam Buss, Dmitry Itsykson, Alexander Knop, Artur Riazanov, and Dmitry Sokolov. Lower bounds on OBDD proofs with several orders. *ACM Trans. Comput. Log.*, 22(4):26:1–26:30, 2021.
- [2] Ludmila Glinskikh and Dmitry Itsykson. On tseitin formulas, read-once branching programs and treewidth. In René van Bevern and Gregory Kucherov, editors, *Computer Science - Theory and Applications - 14th International Computer Science Symposium in Russia, CSR 2019, Novosibirsk, Russia, July 1-5, 2019, Proceedings*, volume 11532 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 143–155. Springer, 2019.
- [3] Dmitry Itsykson, Alexander Knop, Andrei E. Romashchenko, and Dmitry Sokolov. On obdd-based algorithms and proof systems that dynamically change the order of variables. *J. Symb. Log.*, 85(2):632–670, 2020.
- [4] Dmitry Itsykson, Alexander Okhotin, and Vsevolod Oparin. Computational and proof complexity of partial string avoidability. *ACM Trans. Comput. Theory*, 13(1):6:1–6:25, 2021.

- [5] Dmitry Itsykson and Artur Riazanov. Proof complexity of natural formulas via communication arguments. In Valentine Kabanets, editor, *36th Computational Complexity Conference, CCC 2021, July 20-23, 2021, Toronto, Ontario, Canada (Virtual Conference)*, volume 200 of *LIPICs*, pages 3:1–3:34. Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum für Informatik, 2021.
- [6] Dmitry Itsykson, Artur Riazanov, Danil Sagunov, and Petr Smirnov. Near-optimal lower bounds on regular resolution refutations of tseitin formulas for all constant-degree graphs. *Comput. Complex.*, 30(2):13, 2021.
- [7] Jan Krajíček. An exponential lower bound for a constraint propagation proof system based on ordered binary decision diagrams. *Journal of Symbolic Logic*, 73(1):227–237, 2008.
- [8] Guoqiang Pan and Moshe Y. Vardi. Search vs. symbolic techniques in satisfiability solving. In *7th International Conference on Theory and Applications of Satisfiability Testing, SAT 2004, Revised Selected Papers*, volume 3542, pages 235–250, 2005.
- [9] Nathan Segerlind. On the relative efficiency of resolution-like proofs and ordered binary decision diagram proofs. In *Proceedings of the 23rd Annual IEEE Conference on Computational Complexity, CCC 2008, 23-26 June 2008, College Park, Maryland, USA*, pages 100–111. IEEE Computer Society, 2008.