Отчет по гранту конкурса «Молодая математика России» за 2021 год

Егор Косов

1. Полученные результаты

В отчетный период велось исследование по трем направлениям: свойства распределений многочленов от гауссовских случайных величин и верхние оценки расстояния по вариации между распределениями случайных величин такого вида (работа [5]); дискретизация интегральных норм (обзор [4]); регулярность решений уравнений типа Колмогорова, порожденных возмущением оператора Орнштейна–Уленбека (работа [1]).

1. Многочлены второй степени от гауссовских случайных величин.

Пусть $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$ — стандартный нормальный вектор в $\mathbb{R}^n$, т.е. Z_k — независимые, одинаково распределенные случайные величины с распределением $\mathcal{N}(0,1)$. Известно (см. [6] и [3]), что для двух многочленов f и g степени не выше d от n переменных справедливо следующее неравенство типа Давыдова–Мартыновой

$$d_{\mathrm{TV}}\bigl(f(Z), g(Z)\bigr) \le \frac{C(d)}{[\mathbb{D}g(X)]^{\frac{1}{2d}}} \|f(Z) - g(Z)\|_2^{1/d}, \tag{1}$$

где $\|f(Z) - g(Z)\|_2 := \bigl(\mathbb{E}|f(Z) - g(Z)|^2\bigr)^{1/2}$, $\mathbb{D}g(X)$ — дисперсия случайной величины $g(X)$,

$$d_{\mathrm{TV}}\bigl(f(Z), g(Z)\bigr) := \sup\Bigl\{\mathbb{E}\bigl[\varphi\bigl(f(Z)\bigr)\bigr] - \mathbb{E}\bigl[\varphi\bigl(g(Z)\bigr)\bigr],\ \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \|\varphi\|_\infty \le 1\Bigr\},$$

$\|\varphi\|_\infty := \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|$.

В работе [5] более подробно был рассмотрен случай, когда f и g — многочлены второй степени. Каждый многочлен второй степени g может быть представлен в виде

$$g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$$

с некоторыми самосопряженным оператором B, вектором $b \in \mathbb{R}^n$ и числом $\beta \in \mathbb{R}$. Пусть

$$\Lambda(B) := \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$$

обозначает множество всех собственных значений самосопряженного оператора B с учетом кратности. Всегда предполагается, что собственные значения пронумерованы таким образом, что $|\lambda_1| \ge |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \ldots$. В работе [8] был установлен следующий результат: *если $g(x) = \langle Bx, x\rangle - \mathrm{tr}B$ и мощность множества $\{\lambda \in \Lambda(B)\colon \lambda \ne 0\}$ не менее 5, то найдется такое число $C(g)$, что для каждого многочлена $f(x) = \langle Ax, x\rangle - \mathrm{tr}A$ (с самосопряженным оператором A) выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}\bigl(f(Z), g(Z)\bigr) \le C(g)\|f(Z) - g(Z)\|_2.$$

Основной результат работы [5] сформулирован в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть $f(x) = \langle Ax, x\rangle + \langle a, x\rangle + \alpha$ и $g(x) = \langle Bx, x\rangle + \langle b, x\rangle + \beta$ (с самосопряженными операторами A и B). Тогда выполнено неравенство*

$$d_{\mathrm{TV}}\bigl(f(Z), g(Z)\bigr) \le \frac{80}{\sqrt{|s_1| \cdot |s_2|}} \|f(Z) - g(Z)\|_2,$$

где s_1 и s_2 — два собственных числа оператора B одного знака, при условии, что такие собственные числа существуют.

Например, два собственных числа одного знака существуют, если мощность множества $\{\lambda \in \Lambda(B)\colon \lambda \ne 0\}$ не менее 3, что уточняет сформулированный выше результат Р. Зинтаута из работы [8]. Установленный результат является оптимальным в том смысле, что в случае, когда у оператора B нет двух собственных значений одного знака, то оценка из теоремы 1 не выполнена (т.е. оценка из теоремы 1 не выполняется для многочлена $g(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2$).

Как следствие теоремы 1 можно получить оценки расстояния по вариации между нормами гауссвоских векторов. В работе [2] был получен следующий результат. Пусть X и Y — два гауссовских случайных вектора в $\mathbb{R}^n$ с ковариационными матрицами Σ_X и Σ_Y соответственно и $a\in\mathbb{R}^n$. Пусть $\Lambda_{kX}^2:=\sum\limits_{j=k}^{\infty}\lambda_{jX}^2$, где λ_{jX} — собственные значения ковариационной матрицы Σ_X случайного вектора X с учетом кратности, упорядоченные по убыванию, и пусть величина Λ_{kY} определяется аналогично для случайного вектора Y. Тогда

$$d_{\mathrm{Kol}}(|X|,|Y-a|)\le C\Big(\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{1X}\Lambda_{2X}}}+\frac{1}{\sqrt{\Lambda_{1Y}\Lambda_{2Y}}}\Big)\Big(\|\Sigma_X-\Sigma_Y\|_{(1)}+|a|^2\Big)$$

для некоторой численной постоянной $C>0$, где $\|\cdot\|_{(1)}$ — ядерная норма матрицы и d_{Kol} — расстояние по Колмогорову между распределениями случайных величин, т. е.

$$d_{\mathrm{Kol}}(\xi,\eta):=\sup_{t\in\mathbb{R}}\big|P(\xi\le t)-P(\eta\le t)\big|.$$

В качестве следствия теоремы 1, в работе [5] был установлен следующий аналог приведенной выше оценки для расстояния по вариации вместо расстояния по Колмогорову:

$$d_{\mathrm{TV}}\big(|X|,|Y-a|\big)\le\frac{160}{\sqrt{\lambda_{1X}\cdot\lambda_{2X}}}\big(\|\Sigma_X-\Sigma_Y\|_{HS}+|\mathrm{tr}\Sigma_X-\mathrm{tr}\Sigma_Y|+|a|^2+|\Sigma_Y^{1/2}a|\big).$$

2. Дискретизация интегральных норм.

Пусть Ω — некоторая область и пусть μ — вероятностная борелевскя мера на ней. Предположим, что фиксированы числа $C>c>0$. В задаче дискретизации с помощью выбора точек для данного N-мерного подпространства L в $L^p(\mu)\cap C(\Omega)$ исследуется вопрос о том, каково минимальное натуральное число m, для которого найдутся такие точки $x_1,\dots,x_m$ в Ω, что

$$c\|f\|_p^p\le\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m|f(x_j)|^p\le C\|f\|_p^p\quad\forall f\in L,$$

где $\|f\|_p:=\Big(\int_\Omega|f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}$, $\|f\|_\infty:=\sup\limits_{x\in\Omega}|f(x)|$.

Данная задача восходит к классическим результатам Бернштейна, Марцинкевича и Марцинкевича–Зигмунда о дискретизации L^p-норм тригонометрических многочленов одной переменной. Случай $p=2$ на настоящий момент наиболее изучен и для этого случая в работе [7] И.В. Лимонова и В.Н. Темляков доказали следующую теорему.

Теорема 2 (И.В. Лимонова, В.Н. Темляков)**.** *Существуют такие положительные числа C_1,C_2,C_3, что для каждого N-мерного подпространства $L\subset L^2(\mu)\cap C(\Omega)$ (вещественного или комплексного), удовлетворяющего условию:*

$$\|f\|_\infty\le M\sqrt{N}\|f\|_2\quad\forall f\in L,$$

найдутся такие $m\le C_1M^2N$ точек $x_1,\dots,x_m\in\Omega$, что

$$C_2\|f\|_2^2\le\frac{1}{m}\sum_{j=1}^m|f(x_j)|^2\le C_3M^2\|f\|_2^2\quad\forall f\in L.$$

Отдельный интерес представляет задача «почти изометричной» дискретизации, т.е. дискретизации с $C=1+\varepsilon$, $c=1-\varepsilon$, $\varepsilon\in(0,1)$. За отчетный год в направлении вопросов дискретизации интегральных норм было установлено следующее уточнение теоремы Лимоновой–Темлякова (статья находится на стадии подготовки).

Теорема 3. *Для каждого $\varepsilon \in (0,1)$ и для каждого N-мерного подпространства L в пространстве $L^2(\mu) \cap C(\Omega)$ (вещественного или комплексного), удовлетворяющего условию*

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{N}\|f\|_2 \quad \forall f \in L,$$

найдутся такие $m \le 10^5\varepsilon^{-2}N$ точек $x_1, \dots, x_m \in \Omega$, что

$$(1-\varepsilon)\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(x_j)|^2 \le (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in L.$$

Отметим, что условие

$$\|f\|_\infty \le \sqrt{N}\|f\|_2 \quad \forall f \in L$$

равносильно предположению о том, что существует ортонормированный базис $u_1, \dots, u_N$ в L, для которого

$$|u_1(x)|^2 + \ldots + |u_N(x)|^2 = N.$$

Напрмиер, данное условие выполняется для произвольной тригонометрической системы и справедливо такое следствие.

Следствие 4. *Пусть Q — произвольное конечное подмножество в $\mathbb{Z}^d$, $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда существуют такие $m \le 10^5\varepsilon^{-2}|Q|$ точек $x_1, \dots, x_m$, что*

$$(1-\varepsilon)\|f\|_2^2 \le \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}|f(x_j)|^2 \le (1+\varepsilon)\|f\|_2^2 \quad \forall f \in \mathcal{T}(Q),$$

где $\mathcal{T}(Q) = \{f\colon f = \sum\limits_{k\in Q} c_k e^{i\langle k,x\rangle}, c_k \in \mathbb{C}\}$.

Кроме того, по теме дискретизации интегральных норм совместно с Б.С. Кашиным, В.Н. Темляковым и И.В. Лимоновой написана обзорная статья [4].

3. Регулярность решений уравнений типа Колмогорова.

Пусть γ — центрированная гауссовская мера на некотором сепарабельном банаховом пространстве X, H — пространство Камерона–Мартина этой меры и L — ассоциированный с мерой γ оператор Орнштейна–Уленбека. Например, в случае, когда $X = \mathbb{R}^n$, γ — стандартная гауссовская мера, т.е. мера с плотностью $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, пространство Камерона–Мартина совпадает со всем $\mathbb{R}^n$, а оператор Орнштейна–Уленбека имеет вид $Lf(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x)\rangle$.

В совместной с В.И. Богачевым и А.В. Шапошниковым работе [1] исследуются свойства интегрируемости плотностей вероятностных решений уравнения $L_v^*\mu = 0$, где

$$L_v\varphi := L\varphi + \langle v, \nabla_H\varphi\rangle_H,$$

∇_H — градиент вдоль пространства Камерона–Мартина, а уравнение понимается в смысле интегрального тождества

$$\int_X L_v\varphi\, d\mu = 0 \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{FC}^\infty.$$

Известно, что решение μ такого уравнения задается плотностью относительно меры γ.

Пусть $m \ge 1$ и пусть $\psi_m(t) := e^{t^m} - 1$ при $t > 0$. Напомним, что ψ_m-норма Орлича по вероятностной мере μ функции w определяется равенством

$$\|w\|_{L_{\psi_m}(\mu)} := \inf\Bigl\{\lambda > 0\colon \int_E \psi_m(\lambda^{-1}|w|)\, d\mu \le 1\Bigr\}.$$

Пространство Орлича $L_{\psi_m}(\mu)$ состоит из всех функций w с конечной ψ_m-нормой Орлича.

Один из основных результатов работы [1] о повышении γ-интегрируемости плотностей решений уравнений типа $L_v^*\mu = 0$ для ограниченных и близких к ограниченным векторных полей v представлен в следующей теореме.

Теорема 5. *Пусть* $f \in L^1(\gamma)$ *и пусть* $\mu = f \cdot \gamma$ *— вероятностное решение уравнения* $L_v^*\mu = 0$ *для некоторого* μ*-интегрируемого векторного поля* v.

(i) *Если* $v \in L_{\psi_2}(\mu)$, *то*

$$\mu(f \geq t) \leq e^2 t^{-\frac{1}{1-\sigma_2}}$$

и $f \in L^p(\mu)$ *при каждом* $p < \frac{1}{1-\sigma_2}$, *где* $\sigma_2 := \exp\bigl(-2\pi \| |v|_H \|_{L_{\psi_2}(\mu)}\bigr)$;

(ii) *Если* $|v| \in L_{\psi_m}(\mu)$ *при* $m > 2$, *то*

$$\mu(f \geq t) \leq e^2 \exp\bigl(-\sigma_m [\ln t]^{\frac{2}{1+2/m}}\bigr) \quad \forall\, t > 1$$

и $\exp\bigl(\varepsilon [\ln \max\{f, 1\}]^{\frac{2}{1+2/m}}\bigr) \in L^1(\gamma)$ *при каждом* $\varepsilon < \sigma_m$, *где*

$$\sigma_m := \frac{1 - 2/m}{1 + 2/m} \Bigl(2\pi \| |v|_H \|_{L_{\psi_m}(\mu)} (1 - 2/m)\Bigr)^{-\frac{2}{1+2/m}}.$$

(iii) *Если* $|v|_H \in L^\infty(\mu)$, *то*

$$\mu(f \geq t) \leq e^2 e^{-\sigma_\infty [\ln t]^2} \quad \forall\, t > 1$$

и $\exp\bigl(\varepsilon [\ln \max\{f, 1\}]^2\bigr) \in L^1(\mu)$ *при каждом* $\varepsilon < \sigma_\infty$, *где* $\sigma_\infty := \bigl(2\pi \| |v|_H \|_\infty\bigr)^{-2}$.

Список литературы

[1] V.I. Bogachev, E.D. Kosov, A.V. Shaposhnikov, *Regularity of solutions to Kolmogorov equations with perturbed drifts*, Potential Anal., accepted. https://doi.org/10.1007/s11118-021-09954-9

[2] F. Götze, A. Naumov, V. Spokoiny, V. Ulyanov, *Large ball probabilities, Gaussian comparison and anti-concentration*, Bernoulli, 2019, 25:4A, 2538–2563.

[3] Ю.А. Давыдов, Г.В. Мартынова, *Предельное поведение распределений кратных стохастических интегралов*, Статистика и управление случайными процессами, Наука, М., 1987, 55–57.

[4] B. Kashin, E. Kosov, I. Limonova, V. Temlyakov, *Sampling discretization and related problems*, arXiv:2109.07567

[5] Е.Д. Косов, *Распределения многочленов второй степени от гауссовских случайных величин*, Матем. заметки, 2022, 111:1, 67–79 (в печати), arXiv:2105.04016

[6] E.D. Kosov, *Total variation distance estimates via L^2-norm for polynomials in log-concave random vectors*, Int. Math. Res. Not., 2021, 2021:21, 16492–16508.

[7] I.V. Limonova, V.N. Temlyakov, *On sampling discretization in L_2*, arXiv:2009.10789v2.

[8] R. Zintout, *The total variation distance between two double Wiener–Ito integrals*, Statist. Probab. Lett., 2013, 83:10, 2160–2167.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

Опубликованные работы:

1. В.И. Богачев, Е.Д. Косов, С.Н. Попова, *О распределениях однородных и выпуклых функций от гауссовских случайных величин*, Изв. РАН. Сер. матем., 2021, 85:5, 25–57.

2. E.D. Kosov, *Total variation distance estimates via L^2-norm for polynomials in log-concave random vectors*, Int. Math. Res. Not., 2021, 2021:21, 16492–16508.

3. E.D. Kosov, *Marcinkiewicz-type discretization of L^p-norms under the Nikolskii-type inequality assumption*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2021, 504:1, 125358.

Работы, принятые к печати:

4. V.I. Bogachev, E.D. Kosov, A.V. Shaposhnikov, *Regularity of solutions to Kolmogorov equations with perturbed drifts*, Potential Anal., accepted. https://doi.org/10.1007/s11118-021-09954-9

5. E.D. Kosov, *Regularity of linear and polynomial images of Skorohod differentiable measures*, Advances in Mathematics, accepted, arXiv:1907.01084

6. Е.Д. Косов, *Распределения многочленов второй степени от гауссовских случайных величин*, Матем. заметки, 2022, 111:1, 67–79 (в печати).

3. Участие в конференциях и школах, доклады на научных семинарах

1. E.D. Kosov, Sampling discretization and moments of random vectors, Школа-конференция «Дискретизация и смежные вопросы», online, 9–13 марта, 2021.

2. E.D. Kosov, Sampling discretization problem for L^1 norm, Школа-конференция «Sampling recovery and related problems», online, 3–7 мая, 2021.

3. E.D. Kosov, Total variation distance bounds for distributions of polynomials in Gaussian random variables, New Frontiers in High-Dimensional Probability and Applications to Machine Learning, Sirius University of Science and Technology, 12–15 мая, 2021.

4. Е.Д. Косов, Дискретизация интегральных норм по значениям в точках, Конференция международных математических центров мирового уровня, Математический центр «Сириус», 9–13 августа, 2021.

5. E.D. Kosov, Marcinkiewicz type problems for discretization of integral norms, Конференция «Аппроксимация и дискретизация», 30 августа – 3 сентября, 2021.

6. Е.Д. Косов, Оценки расстояния полной вариации между распределениями многочленов фиксированной степени, Семинар по теории функций действительного переменного под руководством Б.С. Кашина и С.В. Конягина, 23 апреля 2021.

7. Е.Д. Косов, Верхние оценки расстояния по вариации между полиномиальными образами мер, Заседания Московского математического общества, 7 декабря 2021.

4. Работа в научных центрах и научных группах.

Являюсь сотрудником двух лабораторий: “Международной лаборатории стохастических алгоритмов и анализа многомерных данных” и лаборатории “Многомерная аппроксимация и приложения”.

5. Педагогическая деятельность

Весна 2021:

Факультет Компьютерных Наук ВШЭ: лекции и семинары по теории вероятностей и математической статистике, лекции и семинары по математическому анализу;

Мехмат МГУ: семинары по математическому анализу, действительному анализу и функциональному анализу.

Осень 2021:

Факультет Компьютерных Наук ВШЭ: лекции и семинары по теории вероятностей и математической статистике, лекции по математическому анализу;

Мехмат МГУ: семинары по функциональному анализу, спецкурс «О гипотезе гиперплоскости».