Отчёт за 2022 год по проекту «О свободных теориях и мотиве проективной квадрики»

Андрей Лавренов

Обзор проекта

Проект посвящён изучению обобщённых теорий когомологий в смысле Левина–Мореля на категории гладких многообразий над полем характеристики 0, а также связанных с ними категорий (чистых) мотивов гладких проективных многообразий.

В первую очередь, мы изучаем однородные проективные многообразия и (алгебраические) K-теории Моравы $\mathrm{K}(n)$: это серия обобщённых теорий когомологий, которая в некотором смысле стартует с K-теории Гротендика и сходится к группам Чжоу CH^* по модулю рациональной эквивалентности.

1 Полученные результаты

Естественным продолжением моего проекта было изучение (обобщённого) J-инварианта для K-теории Моравы, определённого в [PS21].

Классический J-инвариант — это дискретный инвариант, который описывает поведение мотива Чжоу многообразия борелевских подгрупп полупростой линейной алгебраической группы. Впервые он был определён Вишиком [V05] в случае ортогональных групп, а затем обобщён в [PSZ] на другие алгебраические группы.

J-инвариант оказался полезным инструментом для решения нескольких классических задач. Например, он играет важную роль в результатах Вишика о возможных значениях u-инварианта полей [Vi07] и врешении задачи Серра о конечных подгруппах в группе типа E_8 [Sem, GaSe].

Недавно Петров–Семёнов [PS21] обобщили понятие J-инварианта на другие ориентированные теории когомологий в смысле Левина–Мореля. Однако их новый подход позволяет определить «категорифицированную» версию инварианта. А именно, для ориентированной теории когомологий A^*, соответствующий J-инвариант определяется как некоторая фактор-биалгебра $A^*(\mathrm{SO}_m)$, а не как набор чисел. Однако из Теоремы Милнора–Мура о классификации алгебр Хопфа [MiMo] легко заключить, что новое определение несёт ту же информацию, что и старое в случае $A^* = \mathrm{CH}^*(-;\, \mathbb{F}_2)$ (см. [PS21, Замечание 4.8]).

Теорему Милнора–Мура нельзя применить в случае K-теории Моравы напрямую, однако после вычисления структуры биалгебры $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$ выполненной в рамках настоящего проекта, естественной задачей было классифицировать также возможные фактор-биалгебры.

Эту задачу действительно удалось решить, и тем самым предложить дискретный вариант определения обобщённого J-инвариант K-теории Моравы. В действительности, также удалось получить простое описание этого нового инварианта в терминах классического J-инварианта Чжоу.

Для решения этой задачи мы рассмотрели *коннективную* K-теорию Моравы $\mathrm{CK}(n)^*$, которая специализируется как в (периодическую) K-теорию Моравы $\mathrm{K}(n)^*$, так и в Чжоу $\mathrm{CH}^*(-;\mathbb{F}_2)$. Мы смогли обобщить наши результаты о периодической K-теории Моравы и описать структуру биалгебры $\mathrm{CK}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$ (ср. описание структуры биалгебры периодической K-теории Моравы в отчёте за 2021).

Теорема. *Для m, $n \in \mathbb{N}$ структура алгебры $\mathrm{CK}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$ выглядит следующим образом:*

$$\mathrm{CK}(n)^*(\mathrm{SO}_m) = \mathbb{F}_2[v_n][e_1, e_2, \ldots, e_s]/(e_i^2 = e_{2i}\ \forall i, v_n e_i = 0 \text{ при } i \geq 2^n),$$

где $s = \lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor$ и e_k обозначает 0 если $k > s$. Приведённое ко-умножение $\widetilde{\Delta}(x) = \Delta(x) - x \otimes 1 - 1 \otimes x$ задано формулами

$$\widetilde{\Delta}(e_{\langle 2k \rangle}) = \sum_{i=0}^{\nu_2(k)} v_n^{i+1}\, e_{\langle k/2^i \rangle} \otimes e_{\langle k/2^i \rangle} \prod_{j=0}^{i-1} \left(e_{\langle k/2^j \rangle} \otimes 1 + 1 \otimes e_{\langle k/2^j \rangle}\right)$$

где $\langle t \rangle$ обозначает $2^n - 1 - t$, $0 < k < 2^{n-1}$, а $\nu_2(k)$ — это 2-адическое нормирование k, то есть, $k/2^{\nu_2(k)}$ —это нечётное целое число;

$$\widetilde{\Delta}(e_{2^n-1}) = v_n\, e_{2^n-1} \otimes e_{2^n-1},$$

и

$$\widetilde{\Delta}(e_{2k-1}) = 0$$

при $k > 2^{n-1}$.

Затем мы описали возможные фактор-биалгебры $\mathrm{CK}(n)^*(\mathrm{SO}_m)$ пользуясь тем, что они специализируются в фактор-биалгебры $\mathrm{CH}^*(\mathrm{SO}_m;\mathbb{F}_2)$. А именно, мы смогли показать, что $\mathrm{CK}(n)^*$-версия J-инварианта [PS21] содержит ту же информацию, что и обычный J-инвариант Чжоу.

В качестве приложения мы обобщили наш старый результат об общих квадриках на значительно более широкую ситуацию (ср. отчёт за 2021 год).

Теорема. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, и пусть q — это квадратичная форма размерности m с тривиальным дискриминантом. Обозначим через $J(q)$ (классический Чжоу) J-инвариант. Предположим, что*

$$J(q) \cap \{1, \ldots, 2^n - 1\} = \emptyset$$

(например, это верно для общей квадратичной формы q). Пусть X обозначает многообразие максимальных изотропных подпространств q в случае нечётномерной квадрики или его связную компоненту для чётного m. Тогда имеет место следующее утверждение

1. $\mathrm{K}(n)$*-мотив* $\mathcal{M}_{\mathrm{K}(n)}(X)$ *неразложим при* $m \leq 2^{n+1} - 2$.

2. $\mathrm{K}(n)$*-мотив* $\mathcal{M}_{\mathrm{K}(n)}(X)$ *распадается на* $2^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor - 2^n + 2}$ *неразложимых слагаемых ранга* $2^{2^n - 2}$ *при* $m \geq 2^{n+1} - 1$.

Результаты исследований можно найти в готовящемся препринте.

2 Публикации и препринты

В 2022 году были приняты в печать две статьи, написанные при поддержке конкурса «Молодая математика России».

- Моя совместная статья с Сергеем Синчуком и Егором Воронецким

  A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, «Centrality of K_2 for Chevalley groups: a pro-group approach»

  принята в Israel Math. J. (см. подтверждение по ссылке shorturl.at/gx049). Ссылка на препринт: arxiv.org/abs/2009.03999.

- Моя совместная статья с Сергеем Синчуком и Егором Воронецким

  A. Lavrenov, S. Sinchuk, E. Voronetsky, «On the $\mathbb{A}^1$-invariance of K_2 modeled on linear and even orthogonal groups»

  принята в International Mathematics Research Notices (см. подтверждение по ссылке doi.org/10.1093/imrn/rnac320). Ссылка на препринт: arxiv.org/abs/2110.11087.

Полученные в этом году результаты содержатся в препринте

- N. Geldhauser, A. Lavrenov, V. Petrov, P. Sechin, «Morava J-invariant» (2022) 1–40,

  который можно найти по ссылке shorturl.at/pwCIM.

3 Участие в конференциях и школах

В этом году я делал доклад о своих результатах «On J-invariant of quadratic forms» на конференции «Algebraic groups, their friends and relations», 23 сентябряя 2022 (онлайн). Кроме того, я несколько раз выступал с докладами на организованном мной онлайн-семинаре по геометрической теории квадратичных форм.

4 Работа в научных центрах и международных группах

В этом году у меня была позиция младшего научного сотрудника в международном математическом институте Леонарда Эйлера в Санкт-Петербурге. Двое из моих постоянных соавторов в течение последних лет работают в Германии — это Никита Гельдхаузер из университета им. Людвига Максимилиана в Мюнхене, и Павел Сечин из университета Регенсбурга. Совместно с Павлом Сечиным мы организовали онлайн семинар по геометрической теории квадратичных форм.

5 Педагогическая деятельность

В этом году в в весеннем семестре я вёл две пары в неделю (практика по линейной алгебре и лекция по алгебраической геометрии) на факультете математики и компьютерных наук в Санкт-Петербургском Государственном Университете.

6 Итоги трёх лет

В своей заявке я формулировал две гипотезы: о строении $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ и о поведении $\mathrm{K}(n)$-мотива общей квадрики. Обе задачи удалось решить, более того, в обоих направлениях получены гораздо более общие результаты, чем я изначально надеялся.

А именно, для алгебры $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ не только доказаны результаты о стабилизации: она явно вычислена вместе со структурой ко-алгебры, классифицированы би-идеалы (обладающие некоторым дополнительным свойством), описаны идемпотенты в двойственной алгебре. Все эти структуры имеют приложения к теории мотивов. Описано не только разложение $\mathrm{K}(n)$-мотива общей квадрики, но и квадрики с достаточно общим J-инвариантом. Помимо мотива квадрики, описано разложение мотива максимального ортогонального грассманиана с достаточно общим J-инвариантом.

Кроме того, в течение проекта я занимался ещё одной темой, не связанной с K-теорией Моравы. Она посвящена далёким аналогам проблемы Серра, в частности, вычислению вторых гомологий расщепимых односвязных групп Шевалле. В этом направлении также удаолсь получить интересные результаты, а именно, удалось дать явное описание универсального центральное расширения для групп типа F_4, а такжке и удалось доказать гомотопичскую инвариантность мультипликаторов Шура для групп типа D_l (например, для группы Spin_{2l}).

В первый год удалось установить точное разложение $\mathrm{K}(n)$-мотива общей проективной квадрики и доказать стабилизацию $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ с ростом m. Кроме того, в первый год было описано образующими и соотношениями универсальное центральное расширение группы $\mathrm{G}(\mathsf{F}_4, R)$.

Во второй год удалось вычислить структуру алгебры и ко-алгебры $\mathrm{K}(n)^*(\mathrm{Spin}_m)$ для любых m и n соединив нашу технику с частичными вычислениями в топологии. Кроме того, удалось описать разложение $\mathrm{K}(n)$-мотива максимального ортогонального грассманиана общей квадрики. Такжке была доказана гомотопичская инвариантность мультипликаторов Шура для групп типа D_l, и как следствие явное описание вторых гомологий дискретной группы $\mathrm{H}_2(\mathrm{Spin}_{2l}(R); \mathbb{Z})$.

В третий год удалось обобщить наши результаты о периодической K-теории Моравы на коннективную K-теорию Моравы $\mathrm{CK}(n)^*$ и благодаря этому дать описание обобщённого J-инвариант K-теории Моравы в терминах классического J-инварианта Чжоу. В качестве приложения мы обобщили результаты о мотивном разложении общих квадрик и грассманианов на значительно более широкую ситуацию.

В течение трёх лет приняты в печать две статьи, поддержанные «Молодой математикой России»: в International Mathematics Research Notices и в Israel Math. J. Кроме того, написано ещё два препринта, которые пока не приняты в печать.

Список литературы

[GaSe] S. Garibaldi, N. Semenov, "Degree 5 invariant of E_8", *Int. Math. Res. Not.* **19** (2010) 3746–3762.

[MiMo] J. Milnor, J. Moore, "On the Structure of Hopf Algebras", *Annals of Mathematics* **81**:2 (1965) 211–264.

[PS21] V. Petrov, N. Semenov, "Hopf-theoretic approach to motives of twisted flag varieties", *Comp. Math.* **157**:5 (2021) 963–996.

[PSZ] V. Petrov, N. Semenov, K. Zainoulline, "J-invariant of linear algebraic groups", *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **41** (2008) 1023–1053.

[Sem] N. Semenov, "Motivic construction of cohomological invariants", *Comment. Math. Helv.* **91**:1 (2016) 163–202.

[V05] A. Vishik, "On the Chow groups of quadratic Grassmannians", *Doc. Math.* **10** (2005) 111–130.

[Vi07] A. Vishik, "Fields of u-invariant 2^r+1, in: *Algebra, Arithmetic and Geometry, Manin Festschrift*, Birkhäuser (2007).