Отчет по конкурсу
“Молодая математика России”

А.А. Сагдеев

2021

1 Результаты, полученные в этом году

Мы продолжаем изучение комбинаторных свойств n-мерного пространства $\mathbb{R}^n_\infty$ с чебышёвской максимум-метрикой ℓ_∞, определяемой для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n_\infty$ формулой

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_\infty = \max_i |x_i - y_i|, \tag{1}$$

начатое нами в 2020 году при поддержке гранта конкурса “Молодая математика России”. Полученные в 2021 году результаты мы условно подразделяем на четыре раздела.

1.1 Вокруг равносторонней размерности

Для заданного метрического пространства $\mathbb{X}$ его *равносторонней размерностью* $e(\mathbb{X})$ называется наибольшее количество точек, которые можно в нем выбрать так, чтобы все расстояния между ними были попарно равны. Одними из наиболее естественных кандидатов для изучения в этой постановке являются n-мерные ℓ_p-пространства $\mathbb{R}^n_p$. Напомним, что ℓ_p-расстояние между двумя точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_p = \left(|x_1 - y_1|^p + \ldots + |x_n - y_n|^p\right)^{1/p}$$

для всех действительных $p \geq 1$, а в случае $p = \infty$ — формулой (1).

Нетрудно видеть[1], что в евклидовом случае $e(\mathbb{R}^n_2) = n+1$, в то время как в случае чебышевском $e(\mathbb{R}^n_\infty) = 2^n$ для произвольного значения n. Нижние границы здесь даются множествами вершин единичного симплекса и гиперкуба соответственно. Отметим, что о значениях величины $e(\mathbb{R}^n_p)$ при других значениях p (даже для такого естественного случая как $p = 1$) известно очень немногое. В рамках настоящего исследования мы решаем две родственные экстремальные задачи для пространства $\mathbb{R}^n_\infty$.

Первая из них восходит к статье Грэма, Ротшильда и Штрауса[2], в которой авторам удалось доказать следующее.

Теорема 1. *Наибольшее число точек в $\mathbb{R}^n_2$ с попарно нечетными расстояниями равняется $n + 2$ когда $n \equiv 14 \pmod{16}$, и $n + 1$ во всех остальных случаях.*

[1] C.M. Petty, *Equilateral sets in Minkowski spaces*, Proc. Amer. Math. Soc., 29 (1971), 369–374.

[2] R.L. Graham, B.L. Rothschild, E.G. Straus, *Are there $n + 2$ points in E^n with odd integral distances?* The American Mathematical Monthly, 81.1 (1974): 21–25.

Мы находим следующий несложный аналог последнего результата для пространства с максимум-метрикой показывающий, что естественная конструкция, заданная вершинами единичного гиперкуба, является оптимальной в любой размерности.

Теорема 2. *Наибольшее число точек в* $\mathbb{R}^n_\infty$ *с попарно нечетными расстояниями в точности равняется* 2^n *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Вторая родственная задаче о равносторонней размерности проблема, рассматриваемая нами в рамках настоящего исследования, имеет дело с понятием *равносторонней вправо* последовательности. Мы называем последовательность точек $\mathbf{x}^{(1)}, \dots, \mathbf{x}^{(m)}$ в пространстве $\mathbb{R}^n_p$ *равносторонней вправо*, если $\|\mathbf{x}^{(j_1)} - \mathbf{x}^{(i)}\|_p = \|\mathbf{x}^{(j_2)} - \mathbf{x}^{(i)}\|_p$ при всех $1 \leq i < j_1 \leq j_2 \leq m$. Грубо говоря, это означает, что каждая точка находится на одном и том же удалении от всех точек, расположенных правее нее в последовательности.

Полянский доказал[3], что для любого $n-$мерного нормированного пространства, размер любой равносторонней вправо последовательности в нем не превосходит $n \cdot 3^n$. Что касается частных случаев, нетрудно видеть, что размер наибольшей равносторонней вправо последовательности в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n_2$ равен $n+2$. Действительно, нижнюю оценку доставляет конкретный пример (правильный симплакс с отмеченным центром), в то время как верхнюю оценку можно доказать по индукции. Никакие другие частные результаты не были известны для пространств $\mathbb{R}^n_p$. Нам же в рамках настоящего исследования удалось доказать следующее.

Теорема 3. *Наибольший размер равносторонней вправо последовательности в* $\mathbb{R}^n_\infty$ *в точности равняется* $2^{n+1} - 1$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$.

Доказательства обеих Теорем 2 и 3 основаны на теории частично упорядоченных множеств в общем и теореме Дилуорса в частности.

1.2 Хроматические числа: одномерные конфигурации

Задачи этого раздела берут свое начало в 1950 году со знаменитого вопроса Нельсона о том, какого минимального числа цветов $\chi(\mathbb{R}^2_2)$ достаточно для того, чтобы раскрасить евклидову плоскость $\mathbb{R}^2_2$ так, что никакие две точки на единичном расстоянии не оказались бы покрашены в один и тот же цвет. Несмотря на простоту формулировки этого вопроса, на данный момент известно только, что $5 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$, причем неравенство $\chi(\mathbb{R}^2_2) \geq 5$ было доказано только в 2018 году[4].

Опишем одно из наиболее далекоидущих обобщений исходной задачи Нельсона. Пусть $\mathbb{X} = (X, d_X)$, $\mathcal{Y} = (Y, d_Y)$ — произвольные метрические пространства. Подмножество $X' \subset X$ мы будем называть *копией* пространства $\mathcal{Y}$, если существует биективное отображение $f : Y \to X'$ такое, что $\forall\, y_1, y_2 \in Y$ справедливо, что $d_Y(y_1, y_2) = d_X(f(y_1), f(y_2))$. *Хроматическим числом* $\chi\,(\mathbb{X}, \mathcal{Y})$ *пространства* $\mathbb{X}$ *с запрещенным пространством* $\mathcal{Y}$ называется минимальное число цветов, которых достаточно для такой раскраски множества X, при которой ни одна копия $X' \subset X$ пространства $\mathcal{Y}$ не является полностью одноцветной. Нетрудно видеть, что если $\mathbb{X}$ представляет собой евклидову плоскость $\mathbb{R}^2_2$, а $\mathcal{Y}$ — это пара точек на единичном расстоянии, то только что определенная величина $\chi\,(\mathbb{X}, \mathcal{Y})$ в точности совпадает с упомянутой выше величиной $\chi(\mathbb{R}^2_2)$, так что такая постановка задачи действительно является обобщающей.

[3] A. Polyanskii, *Pairwise intersecting homothets of a convex body*, Discrete Math., 340 (2017): 1950–1956.
[4] A.D.N.J. de Grey, *The chromatic number of the plane is at least* 5, Geombinatorics, 28 (2018), 18 - 31.

В рамках *евклидовой теории Рамсея*[5,6,7] изучается ситуация, когда $\mathbb{X} = \mathbb{R}_2^n$, а пространство $\mathcal{Y}$ является некоторым подмножеством $\mathbb{R}^n$ с индуцированной на нем естественной метрикой. Евклидова теория Рамсея представляет из себя бурно развивающийся, богатый как красивыми результатами, так и нетривиальными открытыми вопросами раздел комбинаторики.

В 2020 году мы изучили традиционно важный для евклидовой теории Рамсея вопрос об экспоненциальности роста хроматического числа с ростом размерности для случая пространства с максимум-метрикой метрикой $\mathbb{R}_\infty^n$. Основной доказанной нами теоремой является следующая.

Теорема 4. *Для любого конечного метрического пространства $\mathcal{Y}$ существует константа $c = c(\mathcal{Y}) > 1$, с которой при $n \to \infty$ верно неравенство $\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{Y}) > (c + o(1))^n$.*

Наиболее важными частными случаями пространств $\mathcal{Y}$, рассмотрение которых позволило нам доказать теорему 4 во всей ее общности, являются 'одномерные метрические пространства' — *батоны*. Дадим формальное определение. Для $k \in \mathbb{N}$ положим $[k] = \{1, 2, \dots, k\}$ и $[k]_0 = \{0\} \cup [k]$. Для заданной последовательности положительных действительных чисел $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ положим $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k$. При каждом $i \in [k]_0$ зададим $\sigma_i = \sum_{j=1}^{i} \lambda_j$. Отметим, что $\sigma_0 = 0$. Мы назовем последовательность $\{\sigma_0, \dots, \sigma_k\} \subset \mathbb{R}$ *батоном* и обозначим за $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$. Если $\lambda_i \in \mathbb{N}$ при всех $i \in [k]$, то мы назовем $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$ *целочисленным батоном.* Наконец, если $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = \lambda$, т.е. $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$ представляет из себя арифметическую прогрессию с шагом λ, мы для краткости обозначим $\mathcal{B}(\boldsymbol{\lambda})$ за $\mathcal{B}_k(\lambda)$, а если вдобавок $\lambda = 1$, то просто за $\mathcal{B}_k$.

В 2020 году нам удалось найти оптимальное значение константы $c(\mathcal{B})$ из Теоремы 4 для некоторых целочисленных батонов $\mathcal{B}$. А именно, нам удалось доказать, что $c(\mathcal{B}_k) = \frac{k+1}{k}$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а также, что $c(\mathcal{B}(1,2)) = c(\mathcal{B}(1,3)) = \frac{5}{3}$.

За прошедший год мы значительно усилили наш предшествующий результат и нашли точное значение $c(\mathcal{B})$ для *всех* целочисленных батонов $\mathcal{B}$. Точнее — свели эту задачу в растущей размерности к одномерной теоретико-числовой проблеме, ответ на которую можно найти перебором за конечное время.

Теорема 5. *Для любого целочисленного батона $\mathcal{B}$ при $n \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\chi(\mathbb{R}_\infty^n, \mathcal{B}) = \big(d(\mathbb{Z}, \mathcal{B})^{-1} + o(1)\big)^n,$$

где $d(\mathbb{Z}, \mathcal{B})$ — наибольшая плотность подмножества $A \subset \mathbb{Z}$ такого, что при любом $x \in \mathbb{Z}$ ни транслят $x + \mathcal{B}$, ни отраженный транслят $x - \mathcal{B}$ не лежат полностью в A.

Отметим, что не смотря на отностительную конструктивность последнего результата и возможность вычислить явно значение величины $d(\mathbb{Z}, \mathcal{B})$ для каждого наперед заданного батона $\mathcal{B}$ за конечное время, задача выражения ее значения 'как функции от $\mathcal{B}$' представляется сложной даже для трехточечных батонов, и многие вопросы касательно ее поведения остаются открытыми[8,9,10], оставляя простор для дальнейших исследований.

[5] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems I*, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 14 (1973), N3, 341 - 363.

[6] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems II*, In A. Hajnal, R. Rado and V. Sós, eds., Infinite and Finite Sets I, North Holland, Amsterdam, 1975, 529 - 557.

[7] R.L. Graham, B.L. Rothschild, J.H. Spencer, *Ramsey theory*, 2nd ed., Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim., New York, John Wiley & Sons, Inc., 1990.

[8] W.M. Schmidt, D.M. Tuller, *Covering and packing in $\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{R}^n$, (I)*, Monatsh. Math., 153 (2008), N3, 265–281.

[9] W.M. Schmidt, D.M. Tuller, *Covering and packing in $\mathbb{Z}^n$ and $\mathbb{R}^n$, (II)*, Monatsh. Math., 160 (2010), N2, 195–210.

[10] B. Bollobás, S. Janson, O. Riordan, *On covering by translates of a set*, Random Structures Algorithms, 38 (2011), NN 1–2, 33–67.

Использованная в доказательстве Теоремы 5 техника может быть обобщена для нахождения основания экспоненты $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B})$ и для 'не целочисленных' батонов. Однако, из-за нетривиальности общей формулировки, мы ограничимся только предъявлением одного ее следствия.

Теорема 6. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — последовательность линейно независимых над $\mathbb{Z}$ положительных чисел. Положим $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$. Тогда при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}) = \left(\frac{k+1}{k} + o(1)\right)^n.$$

1.3 Хроматические числа: декартовы произведения

Для любых двух метрических пространств $\mathcal{X} = (X, \rho_X)$ and $\mathcal{Y} = (Y, \rho_Y)$ мы определим их *декартово произведение* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ как метрическое пространство $(X \times Y, \rho)$, где

$$\rho\left((x_1, y_1), (x_2, y_2)\right) = \max\left\{\rho_X\left(x_1, x_2\right), \rho_Y\left(y_1, y_2\right)\right\}$$

при всех $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$. Как и обычно, мы обозначим $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ за $\mathcal{X}^2$ и так далее.

Нам удалось найти точное основание экспоненты $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y})$ не только для случая одномерных метрических пространств, но и для их декартовых произведений. Основным полученным нами на этом направлении результатом является следующий.

Теорема 7. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$, а $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — положительные действительные числа. Тогда при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi\big(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k(\lambda_1) \times \cdots \times \mathcal{B}_k(\lambda_m)\big) = \left(\frac{k+1}{k} + o(1)\right)^n.$$

Отметим два на первый взгляд следствия этой теормы, которые могут показаться неожиданными на первый взгляд.

Следствие 1. *Пусть $k, m \in \mathbb{N}$. Тогда при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}_k^m) = \left(\frac{k+1}{k} + o(1)\right)^n.$$

В частности, основание экспоненты не зависит от размерности решетки.

Следствие 2. *Пусть $\mathcal{H}$ — гипер-прямоугольник, т.е. декартово произведение нескольких двухточечных множеств. Тогда при $n \to \infty$ верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{H}) = (2 + o(1))^n.$$

В частности основание экспоненты не зависит ли от размерности гипер-прямоугольника, ни от длин его сторон.

Отметим, что ситуация с гипер-прямоугольником в максимум-метрике радикально отличается от евклидова случая, в котором точное основание экспоненты хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n_2, I^d)$ с запрещенным одноцветным d-мерным кубом не известно ни при каком d (даже для случая $d = 1$), однако доказано[11,12], что оно лежит между $1 + 2^{-d}$ и $1 + d^{-1/2}$, и в частности, зависит от размерности d.

Заметим, что Теорема 7 не позволяет напрямую работать с декартовыми произведениями батонов, не являющихся арифметическими прогрессиями. В частности, мы подозреваем, что как и для батона $\mathcal{B}(1,2)$, основание хроматического числа $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{B}^2(1,2))$ для его квадрата равняется $\frac{5}{3}$. Однако, данная гипотеза пока остается недоказанной и представляет из себя одно из интересных возможных направления дальнейшего продолжения наших исследований.

1.4 Хроматические числа: бесконечные множества

Известно[13], что для любого $n \in \mathbb{N}$ и для любого бесконечного $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n_2$ в евклидовом случае справедливо равенство $\chi(\mathbb{R}^n; \mathcal{Y}) = 2$. Нам удалось доказать следующий чебышёвский аналог этого утверждения.

Теорема 8. *При всех $n \in \mathbb{N}$ и всех бесконечных $\mathcal{Y} \subset \mathbb{R}^n_\infty$ верно, что $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y}) \leq n + 1$.*

Доказательство данной теоремы проводится с использованием вероятностной техники (локальной леммы Ловаса) с привлечением аксиомы выбора.

Удивительно, но результат этой теоремы является в общем виде неулучшаемым как показывает пример геометрических прогрессий. Для действительного $q > 0$, определим следующее бесконечное множество $\mathcal{G}(q)$, снабженное естественной метрикой на прямой $\mathbb{R}$:

$$\mathcal{G}(q) \coloneqq \{0, 1, 1 + q, 1 + q + q^2, 1 + q + q^2 + q^3, \ldots\}.$$

Теорема 9. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого положительного $q \leq q_0(n) \coloneqq 2^{-n-2}$ верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{G}(q)) = n + 1.$$

Данные результат, однако, не гарантирует существование ни одного бесконечного метрического пространства $\mathcal{Y}$ такого, что величина $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{Y})$ стремится к бесконечности с ростом n. Решению данной проблемы посвящен наш следующий результат.

Теорема 10. *Для любого положительного $q \leq 1/32$ и любого $n \in \mathbb{N}$ верно, что*

$$\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{G}(q)) \geq \log_3 n.$$

Одним из потенциальных возможных направлений улучшения данного результата в будущем является задача о повышении скорости стремления хроматического числа к бесконечности с логарифмической до полиномиальной. Другим — расширение интервала допустимого диапазона значений q. В частности, правда ли, что даже $\chi(\mathbb{R}^n_\infty, \mathcal{G}(1/2))$ стремится к бесконечности с ростом n?

[11] A.A. Sagdeev, *Exponentially Ramsey Sets*, Probl. Inf. Transm, 54 (2018), N4, 372–396.

[12] R.I. Prosanov, *Upper Bounds for the Chromatic Numbers of Euclidean Spaces with Forbidden Ramsey Sets*, Math. Notes, 103 (2018), N2, 243–250.

[13] P. Erdős, R.L. Graham, P. Montgomery, B.L. Rothschild, J. Spencer, E.G. Straus, *Euclidean ramsey theorems II*, In A. Hajnal, R. Rado and V. Sós, eds., Infinite and Finite Sets I, North Holland, Amsterdam, 1975, 529 - 557.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

1. A. Kupavskii, A. Sagdeev, *All finite sets are Ramsey in the maximum norm*, Forum of Mathematics, Sigma, 2021, Vol. 9, e55, 12 pp.

2. N. Frankl, A. Kupavskii, A. Sagdeev, *Max-norm Ramsey Theory*, arXiv:2111.08949.

3. A. Golovanov, A. Kupavskii, A. Sagdeev, *On the maximum sizes of odd-distance and right-equidistant sets in the space with the maximum metric*, unpublished manuscript.

3 Участие в конференциях и школах

1. Online workshop on Euclidean Ramsey Theory, Budapest, Hungary, March 10–12, 2021.

2. The 23rd Thailand-Japan Conference on Discrete and Computational Geometry, Graphs, and Games, *Max-norm analogs of Euclidean Ramsey theorems*, Contributed online talk, Chiang Mai, Thailand, September 3–5, 2021.

3. European Conference on Combinatorics, Graph Theory and Applications, *Integer covering problems and max-norm Ramsey theorems*, Contributed online talk, Barcelona, Spain, September 6–10, 2021.

4. Workshop on open problems in combinatorics and geometry, Adygea, Russia, October 3–11, 2021.

5. Autumn Mathematical Readings in Adygea, *Chebyshev Ramsey theory and its connection to integer covering problems*, Contributed talk, Maykop, Russia, October 12–17, 2021.

4 Педагогическая деятельность

- Семинарист по курсу "Дискретная Математика" у двух групп физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ в весеннем и осеннем семестрах 2021 года.