Отчет по конкурсу “Молодая математика России”

Ахмеджанова Маргарита

Декабрь 2023

1 Результаты, полученные в 2023 году [1]

1.1 Бутстрап перколяция для двудольных графов

Принято считать, что задача о $wsat(G, F)$ берет свое начало из такого направления клеточных автоматов как Бутстрап перколяция графов. $wsat(G, F)$ определяется как наименьшее количество ребер в остовном подграфе G, не содержащем копий F, таком, что все ребра G можно восстановить одно за другим так, что при добавлении каждого следующего ребра добавляется хотя бы одна копия F. Например,

$$wsat(K_n, K_3) = n - 1.$$

В последнем нетрудно убедиться, так как взяв в качестве F граф $K_{1,n-1}$ мы можем восстановить все ребра полного графа. С другой стороны, если ребер в F будет меньше, чем $n-1$, то F (будучи графом на n вершинах) окажется несвязным, и начиная с несвязного графа мы не сможем получить полный граф.
Гораздо сложнее доказать гипотезу Боллобаша о том, что

$$wsat\left(K_n, K_s\right) = (s-2)n - \binom{s-1}{2}.$$

Данная гипотеза была доказана в работе Ловаса с использованием матроидов.
Задача wsat рассматривается и для случайных графов в модели $G(n,p)$. Среди последних работ в данной области мы можем отметить результаты Жуковского, Судакова, Коранди, Бидголи и других. Например, Жуковский в своей работе вместе с соавторами доказывает существование и находит приблизительное значение пороговой вероятности события, когда $wsat(G(n,p), K_s) = wsat(K_n, K_s)$.

Рассмотрим двудольные графы. Асимптотика для полного двудольного графа изучалась в работах Алона, Спенсера, Коранди, Ловаса, Мориса и других. Однако в данных работах остался, среди прочего, не изученным случай когда n близко к числу вершин полного двудольного графа $K_{s,t}$, т.е. n почти равно $s+t$.
В своем проекте мы вместе с Воробьевым и Жуковским в 2023 году доказываем следующий результат.

[1] Автор не стал включать в отчет проекты, которые продолжают направления, уже описанные в отчетах за 2021-2022 года.

Теорема 1. *Для всех $s > 2, j \geq 2$,*

$$2s(j+1) - 2j - 3 \leq |E(K_{2s+j})| - wsat(K_{2s+j}, K_{s,s}) \leq 2s\left(\frac{j(j+1)}{2} + 1\right) - 1.$$

1.2 Раскраски гиперграфов с различными мощностями ребер

Одним из классических примеров задач теории раскрасок гиперграфов является задача Эрдеша-Хайнала о нахождении величины $m(n)$, равной минимально возможному количеству рёбер в гиперграфе в классе n-однородных гиперграфов с хроматическим числом больше двух. Эрдёш и Ловас заметили, что нахождение ведичины $m(n)$ связано с нахождением минимума функции $f(H)$ равной математическому ожиданию количества одноцветных рёбер, когда цвет каждой вершины (черный или белый) выбирается случайным образом.

В нашей работе мы изучали локальный вариант этой проблемы, рассматривая функции $g(H)$ и $g(n)$:

$$g(H) = \max_{e \in H} \sum_{f \in H : f \cap e \neq \emptyset} 2^{-|f|+1}$$

$$g(n) = \min\{g(H) : \text{for any } H \text{ with } s_{\min}(H) \geq n \text{ and } \chi(H) > 2\}$$

В своем исследовании мы вместе с Таис Мартинс доказываем, что $g(n)$ больше или равно $n/(16e)$.

Теорема 2. *Пусть H - это простой неоднородный гиперграф, в котором размер каждого гиперребра не меньше, чем n и $g(H)$ меньше или равно $n/(16e)$. Тогда этот гиперграф H можно правильно раскрасить в два цвета.*

Отметим, что в случае двух-цветных раскрасок простых однородных гиперграфов данный результат совпадает с точностью до алгоритмической константы с результатом Козика и Шабанова, которые в 2016 году доказали, что любой простой n-однородный гиперграф с максимальной степенью ребра не больше, чем с nr^{n-1} можно раскрасить в r цветов, где c - абсолютная константа.

Также отметим, что теорему можно обобщить на случай трех или более цветов.

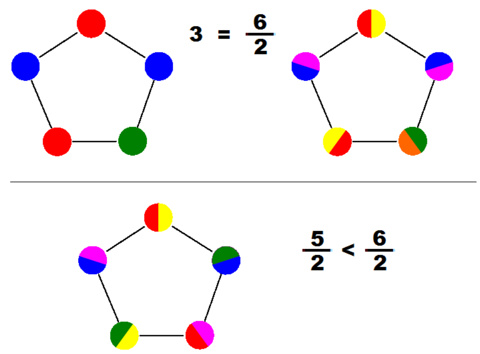
Теорему 1 можно переформулировать следующим образом:

Теорема. *Пусть H - это простой неоднородный гиперграф, в котором размер каждого гиперребра не меньше, чем n и для любого его ребра выполнено, что математическое ожидание количества смежных с ним одноцветных ребер, когда черный и белый цвет назначаются случайно и равновероятно, меньше или равно $n/(16e)$. Тогда такой гиперграф H можно правильно раскрасить в два цвета.*

1.3 Дробные раскраски гиперграфов

Для гиперграфа $H = (V, E)$ дробной раскраской называют неотрицательную вещественную функцию f на множестве всех независимых множеств $\mathbb{I}(H)$ такую, что для любой вершины $v \in V(H)$

$$\sum_{I \in \mathbb{I}(G,v)} f(I) \geq 1.$$



Вес дробной раскраски f равен $\sum_{I \in \mathbb{I}(H)} f(I)$. Дробное хроматическое число определяется как

$$\chi_{\mathrm{f}}(H) = \min_f \sum_{I \in \mathbb{I}(H)} f(I),$$

где минимум берется по всем возможным дробным раскраскам f гиперграфа H.

Другой взгляд заключается в том, что дробные c-раскраски напоминают мультираскраски. С целыми числами a и b такими, что $a/b \leq c$, каждой вершине v присваивается минимум b цветов из набора $\{1, \ldots, a\}$, обеспечивая отсутствие общего цвета у гиперребер. Наименьшее значение c, при котором гиперграф H имеет дробную c-раскраску, является его дробным хроматическим числом, $\chi_f(H)$.

Традиционно, вершинная раскраска моделирует ряд задач планирования. В самой простой формулировке, задан набор работ, которые нужно назначить на временные слоты, каждая работа требует одного такого слота. Работы могут быть запланированы в любом порядке, но пары работ могут конфликтовать в том смысле, что их нельзя назначать на один и тот же временной слот, например, потому что они обе зависят от общего ресурса. Соответствующий граф содержит вершину для каждой работы и ребро для каждой конфликтующей пары работ. Хроматическое число графа точно равно минимальному времени выполнения, оптимальному времени для завершения всех работ без конфликтов.
Если предположить, что мы можем разделить работы на части, то иногда мы можем уменьшить наше время выполнения. См. пример ниже, где дробная раскраска позволяет вам потратить 2,5 часа вместо 3 часов.

Также дробные раскраски применяются в теории кодирования и сжатия информации, см. https://arxiv.org/pdf/2204.11927.pdf

1.3.1 Наши результаты

Дробные $a : b$-раскраски — a цветов в целом, каждая вершина получает b различных цветов, и нет гиперребер с общим цветом.

Сначала предположим, что $n \to \infty$, $a > b \geq 2$ являются константами. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть $H = (V, E)$ - n-однородный гиперграф с*

$$|E(H)| \leq \frac{1}{ab} \left(\frac{n}{\log n} \right)^{1/2} \left(\frac{a}{b} \right)^{n-1}.$$

Если n достаточно велико, то H допускает $a : b$-дробную раскраску.

Теорема 4. *[конструкция гиперграфа] Для любых $a > b \geq 2$ и $n \geq 3$ существует гиперграф с размером ребра n на $C \log \binom{a}{b} \left(\frac{a}{b} - 1\right) \frac{a}{2} n^2 \left(\frac{a}{b}\right)^n$ ребрах, такой что его нельзя $a : b$-дробно раскрасить.*

1.4 Размер наибольшего индуцированного подграфа в случайном графе. Концентрационные оценки

Совместо с Жуковским и Кожевников, при большем участии Кожевникова, получены следуюшие результаты:

Теорема 5. *Пусть $p = p(n) \in (0, 1)$, $q = \frac{1}{1-p}$. Пусть Y обозначает размер максимального индуцированного леса в $G(n, p)$ с максимальной степенью, не превосходящей Δ. Тогда для любых фиксированных $\Delta \geq 3$ и $\varepsilon > 0$ существуют такие константы $a_\Delta \in (1, e)$ и $C > 0$, что если $\frac{C}{n} < p < 1 - \varepsilon$, то а.п.н*

$$2 \log_q(a_\Delta np(1 - \varepsilon)) + 3 \leq Y \leq 2 \log_q(a_\Delta np(1 + \varepsilon)) + 3.$$

Нами также доказана двухточечная концентрация размера наибольшего индуцированного леса и дерева ограниченной степени в $G(n, p = \text{const})$.

Теорема 6. *Пусть $p = const$, $q = \frac{1}{1-p}$. Тогда для любого фиксированного $\Delta \geq 3$ существует константа $a_\Delta \in (1, e)$, такая что а.п.н. размер максимального индуцированного дерева с максимальной степенью, не превосходящей Δ, равен либо $2 \log_q a_\Delta np + 1$, либо $2 \log_q a_\Delta np + 2$.*

Теорема 7. *Пусть $p = const$, $q = \frac{1}{1-p}$. Тогда для любого фиксированного $\Delta \geq 3$ существует константа $a_\Delta \in (1, e)$, такая что а.п.н. размер максимального индуцированного леса с максимальной степенью, не превосходящей Δ, равен либо $2 \log_q a_\Delta np + 1$, либо $2 \log_q a_\Delta np + 2$.*

Опишем краткую историю вопроса и основные понятия.

Наиболее распространённой и хорошо изученной моделью случайного графа является модель Эрдёша–Реньи, обозначаемая как $G(n, p)$. В таком случайном графе n вершин, и каждая пара вершин соединяется ребром с вероятностью p независимо от других пар. При анализе таких графов часто рассматривается понятие индуцированного подграфа, который полностью определяется выбором вершин, включая все рёбра, соединяющие выбранные вершины. Говоря о максимальном индуцированном подграфе, обычно имеют в виду максимальный по размеру (по числу вершин) индуцированный подграф. Еще одно ключевое понятие в анализе случайных графов — "асимптотически почти наверное"(а.п.н.).

Говорят, что некоторое свойство выполняется а.п.н., если оно истинно с вероятностью, стремящейся к 1 при n стремящемся к бесконечности.

Боллобаш и Эрдёш доказали, что если p является константой, то существует функция $f(n) \sim 2\log_q(np)$, где $q = \frac{1}{1-p}$, такая что а.п.н.

$$f(n) \leq \alpha(G(n,p)) \leq f(n) + 1.$$

Здесь выражение $\alpha(G(n,p))$ обозначает размер максимального независимого подграфа в случайном графе $G(n,p)$. После открытия, описанного выше, были проведены исследования, которые показали, что результат Боллобаша и Эрдёша о концентрации размера максимального индуцированного подграфа в случайных графах $G(n,p)$ справедлив не только для числа независимости, но и для размера таких подграфов. Это называется "2-точечной концентрацией так как вероятностное распределение размера подграфов сосредотачивается вокруг двух значений.

Далее было установлено, что если уменьшить ограничение $p = \text{const}$, то размер максимальных индуцированных подграфов по-прежнему сосредотачивается вокруг значения, близкого к $2\log_q(np)$, хотя не обязательно в двух точках. Самый важный результат в этом контексте был получен Фризом, который доказал, что при условии $\frac{C_\varepsilon}{n} < p = o(1)$, где C_ε — большая константа, зависящая от ε, размер максимального индуцированного подграфа $\alpha(G(n,p))$ асимптотически сосредотачивается в интервале $(2\log_q(np) - \frac{\varepsilon}{p}, 2\log_q(np) + \frac{\varepsilon}{p})$.

Кроме того, было установлено, что при более слабых ограничениях на размер интервала, например, $(2 \pm \varepsilon)\log_q(np)$ для фиксированного $\varepsilon > 0$ и $\frac{C_\varepsilon}{n} < p = o(1)$, такая асимптотическая концентрация также наблюдается для размера максимальных индуцированных подграфов в различных контекстах, таких как деревья, паросочетания, пути и циклы.

Эти результаты называются "асимптотическими"и они расширяют понимание концентрации размера максимальных индуцированных подграфов в случайных графах.

2 Опубликованные и находящиеся на рецензировании статьи

- M. Akhmejanova, V. Kozhevnikov *The maximum size of an induced forest in the binomial random graph*, https://doi.org/10.48550/arXiv.2310.09416

- M. Akhmejanova, V. Kozhevnikov *Максимальные индуцированные ациклические подграфы в биномиальном случайном графе G(n,p)*, Труды 65-й Всероссийской научной конференции МФТИ, М: Физматкнига, 2023. — 286 с. ISBN 978-5-89155-391-0.

- M. Akhmejanova, V. Kozhevnikov, *Induced forests and trees in Erdős-Rényi random graph*, (На рацензировании.)

- M. Akhmejanova, V. Kozhevnikov, M. Zhukovskii, *Maximum induced trees and forests of bounded degree in* $G(n,p)$, (На рецензировании.)

- M. Akhmejanova, Ilya Vorobyev, M. Zhukovskii, V. Kozhevnikov, *Weak saturation number of bipartite complete graphs* $K_{s,t}$ *in the clique* K_n *when* $s+t$ *is almost* n, (На рецензировании.)

3 Участие в конференциях и школах

- Jan 10-12, Ramanujan College, University of Delhi, Delhi, India, International Conference on Graphs, Networks and Combinatorics (ICGNC 2023)
- Research visit to the University of Cape Town, Department of Mathematics and Applied Mathematics.
- June 12-16, Pittsburgh, PA, International Conference "Random Structures and Algorithms".
- Seminar of Laboratory of Combinatorial and Geometric Structures https://combgeo.org
- ICS Combinatorics Group Seminar http://uivty.cs.cas.cz/ExtrA/seminar.html

4 Итоги трех лет

В своем проекте автор заявлял три направления исследований и все они достигнуты.

Задача	Результат
В задаче $\mathrm{Game}_1(X, k)$ получен точный ответ для всех x. Автор планирует обобщить предыдущий результат на другие непрерывные версии Chip Game.	Достигнуто полностью
получить достаточные условия на возможность раскрасить в терминах числа ребер ребра. Оптимизировать финкцию $f(H)$.	Достигнуто полностью
В рамках последнего направления планируется решить аналог задачи Эрдеша-Хайнала для дробных $(a : b)$ раскрасок n-графов при многих значениях a и b.	Достигнуто полностью

Помимо этого были получены и другие важные результаты. В частности, были проведены исследования, связанные с концентрационными оценками в области случайных графов. Также были получены результаты, относящиеся к области слабого насыщения графов, что является важным вкладом в теорию графов. В дополнение к этому, были исследованы вопросы раскрасок гиперграфов, что имеет практическое применение в различных областях, а также проведены работы в области теории игр и решения задач турановского типа. Эти результаты подчеркивают многогранность математики.