

Отчет по гранту конкурса
"Молодая математика России"
2021 год
Каплун А.В.

1 Результаты, полученные в этом году

В течение 2021 года продолжалось рассмотрение C^* -алгебры, ассоциированной с динамической задачей распространения волн на метрическом графе Ω ([1, 2]). Напомним, что данная задача выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{ll} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{в } L_2(\Omega) \text{ при } 0 < t < T; \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{K} & \text{при } 0 \leq t \leq T; \\ u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 & \text{в } \Omega; \\ u = f \in L_2(\Gamma \times [0, T]) & \text{на } \Gamma \times [0, T], \end{array}$$

Здесь T - фиксированный финальный момент времени, Γ - граница графа Ω , а \mathcal{K} - класс Кирхгофа, характеризующий условия во внутренних вершинах графа.

Решения данной задачи с управлениями f с фиксированных вершин γ образуют подпространства (*достижимые множества*) \mathcal{U}_γ^s :

$$\mathcal{U}_\gamma^s := \{u^f(\cdot, s) | f \in L_2(\{\gamma\} \times [0, s])\} \subset L_2(\Omega)$$

Операторы проектирования на данные подпространства (P_γ^s) являются неубывающими семействами ортогональных проекторов. Это позволяет определить самосопряженные операторы (*эйконалы*):

$$E_\gamma^T := \int_0^T s dP_\gamma^s.$$

Алгебра эйконалов $\mathfrak{E} := \vee\{E_\gamma^T | \gamma \in \Sigma \subseteq \Gamma\} \subset \mathfrak{B}(L_2(\Omega))$ - операторная C^* -алгебра, образованная эйконалами, представляет собой основной объект изучения.

В ходе продолжения изучения АЭ в 2021 году были различные новые результаты. Было обнаружено, что более удобным объектом для изучения являются т.н. *смещенные эйконалы*:

$$\dot{E}_\gamma^T := \int_0^T (s+1)dP_\gamma^s.$$

Ключевым различием между E_γ^T и \dot{E}_γ^T является отделение непрерывного спектра от 0 у последних, что позволяет обосновать существование канонического представления алгебры эйконалов для графа произвольной структуры. Напомним, что каноническим называется представление АЭ в виде ортогональной суммы алгебр непрерывных матричнозначных функций.

Также были получены критерии, при которых существует гомеоморфизм между некоторой естественной факторизацией графа Ω и факторизацией спектра (множества классов неприводимых представлений) алгебры эйконалов $\hat{\mathfrak{E}}$. Полученные результаты напрямую относятся к изначальной цели изучения АЭ - решению (динамической/спектральной) обратной задачи.

Основной результат можно описать следующим образом. Пусть задан набор вершин γ и моментов времени T_γ . Тогда на графе Ω определятся отношение эквивалентности \sim , зависящее от данного набора. Факторизация Ω/\sim по данному отношению называется остовом графа $\tilde{\Omega}$. На $\tilde{\Omega}$ естественным образом определяются координаты точек (расстояния от граничных вершин). Одновременно рассматривается спектр алгебры эйконалов, отвечающей исходному набору вершин и моментов времени. С использованием канонического представления, на спектре определяются координаты. Координаты позволяют провести дополнительную факторизацию спектра в множество $\tilde{\mathfrak{E}}$, на котором также индуцируются координаты. Наиболее важным является тот факт, что множества $\tilde{\Omega}$ и $\tilde{\mathfrak{E}}$ гомеоморфны и, более того, координаты на обоих множествах совпадают, что означает связь между некоторым объектом изучения обратной задачи (АЭ) и структурой графа.

Дальнейшей задачей является изучение следующего вопроса - возможно ли восстановление всего графа Ω по его факторизации, и, если да, то для каких классов графов (деревья, координатные графы)?

2 Конференции и школы

- Международная конференция "Days on Diffraction 2021", 31 мая - 4 июня 2021, Санкт-Петербург (онлайн)

3 Опубликованные и поданные в печать работы

- Каплун А. В., *Каноническое представление алгебры эйконолов трехлучевого графа*, Записки научных семинаров ПОМИ, Том 506, стр. 57-78, [link](#)
- М.И. Белишев, А.В. Каплун, *Каноническое представление C^* -алгебры эйконолов метрического графа*, Известия РАН. Серия математическая, принята к печати в 2022 году.

4 Работа в научных центрах и международных группах

Работал в рамках конкурса поддержки аспирантов в Санкт-Петербургском международном математическом институте им. Леонарда Эйлера.

Список литературы

- [1] M.I.Belishev and N.Wada. A C^* -algebra associated with dynamics on a graph of strings. *J. Math. Soc. Japan*, Vol. 67, No. 3 (2015) pp. 1239–1274. doi: 10.2969/jmsj/06731239.
- [2] M.I.Belishev, A.V.Kaplun. Eikonal algebra on a graph of simple structure. *Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications*, Vol. 6 Iss.3 (2018) 4-33.