

Отчет по конкурсу “Молодая математика России”

Константин Логинов

1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЭТОМ ГОДУ

1.1. Ограниченность плюриканонических представлений комплексных многообразий. Пусть X – компактное комплексное многообразие. Естественным инвариантом таких многообразий является размерность Кодаиры $\kappa(X)$, то есть максимум размерностей образов отображений, задаваемых плюриканоническими линейными системами $H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$, где K_X – канонический класс многообразия X , то есть линейное расслоение $\Lambda^{\dim X} \Omega_X^1$. Будем говорить, что для числа m , на котором достигается этот максимум, линейная система $H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$ задает *плюриканоническое отображение* X . Хорошо известно, что группа бимероморфных автоморфизмов $\text{Bir } X$ действует на плюриканонических линейных системах, и, следовательно, она действует на образе плюриканонического отображения. Определенное таким образом представление группы бимероморфных автоморфизмов X называется *плюриканоническим представлением*.

Напомним, что комплексное многообразие X называется *Мойшезоновым*, если оно бимероморфно эквивалентно проективному многообразию. Классическая теорема, доказанная Уено в 1976 году, утверждает, что если многообразие X Мойшезоново, то образ плюриканонического представления группы бимероморфных автоморфизмов конечен. Если многообразие не является Мойшезоновым, существуют примеры многообразий с бесконечным образом плюриканонического представления. Тем не менее, можно доказать следующее обобщение результата Уено [Ue75]. Напомним, что группа Γ имеет *ограниченные конечные подгруппы*, если существует такая константа C , что для любой конечной подгруппы G группы Γ выполнено $|G| < C$.

Теорема 1 ([Lo22]). *Пусть X – компактное комплексное многообразие. Тогда образ плюриканонического представления и образ проективного плюриканонического представления группы бимероморфных автоморфизмов имеют ограниченные конечные подгруппы.*

В этой теореме под проективным плюриканоническим представлением мы понимаем естественное действие группы бимероморфных автоморфизмов на проективизации $\mathbb{P}H^0(X, \mathcal{O}_X(mK_X))$. Отметим, что ограниченность конечных подгрупп для проективного плюриканонического представления не следует напрямую из конечности для плюриканонического представления. Этот факт требует доказательства.

Теорема 2 имеет приложения к изучению свойства Жордана. Напомним, что группа Γ называется *жордановой*, если существует такая константа C , что для любой конечной подгруппы $G \subset \Gamma$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset G$ индекса не больше C . Изучение свойства Жордана в последнее время привлекло внимание многих исследователей. Перечислим некоторые результаты.

Жордановость известна для всех линейных алгебраических групп над полем характеристики ноль, для групп автоморфизмов компактных комплексных поверхностей, а также для групп бимероморфных автоморфизмов поверхностей, которые не являются бимероморфно эквивалентными произведению проективной прямой и эллиптической кривой (в этом случае группа бимероморфных автоморфизмов не является жордановой) [PSh21]. Также жордановость известна для групп автоморфизмов проективных многообразий над полем характеристики ноль [MZh18], и для групп автоморфизмов компактных кэлеровых многообразий [Kim18]. Свойство жордановости установлено также для групп бимероморфных автоморфизмов компактных кэлеровых многообразий размерности три при некоторых дополнительных предположениях [Go21]. Из теоремы 2 мы выводим следующий результат.

Теорема 2 ([Lo22]). *Пусть X – компактное комплексное многообразие размерности n . Предположим, что для его размерности Кодaira выполнено $\kappa(X) \geq n - 2$. Тогда группа бимероморфных автоморфизмов X удовлетворяет свойству Жордана.*

Эту теорему можно рассматривать как еще один шаг в изучении жордановости групп бимероморфных автоморфизмов произвольных комплексных многообразий.

2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

- (i) Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds with large Kodaira dimension.

Подана в печать. arXiv:2209.12032, 2022.

- (ii) Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers (joint with J. Moraga).

Journal of Algebra, vol. 612, 110–146, 2022.

We prove that maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers. As an application, we prove that in each dimension, there is a unique maximal snc Fano variety satisfying Friedman’s d-semistability condition.

(iii) On semistable degenerations of Fano varieties.

European Journal of Mathematics, vol. 8, 991–1005, 2022.

We reproduce the classification of the semistable degenerations of del Pezzo surfaces obtained by Fujita. We also show that the maximal degeneration is unique and has trivial monodromy in dimension ≤ 3 .

3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

- (i) Conference "Algebra, geometry and algebraic geometry". Talk “Coregularity of Fano varieties”, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, December 2022.
- (ii) Seminar talk “Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds”, Imperial College London, MAGIC seminar, October 2022.
- (iii) Seminar talk “Siegel sets and period maps”, Lunts dacha seminar, July 2022.
- (iv) Seminar talk “Jordan property for Cremona groups” at MMP learning seminar, UCLA, online, April 2022.

4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

Являюсь научным сотрудником в МЦМУ “Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук”, младшим научным сотрудником в Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, научным сотрудником в Лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ.

5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Прочитанные в этом году курсы:

- (i) Topology 2, Math in Moscow, lectures and problem sessions, fall 2022.
- (ii) Algebraic geometry, Math in Moscow, lectures and problem sessions, spring 2022.
- (iii) Introduction to K-stability (together with A. Golota), seminar at the Independent University of Moscow, spring 2022 – fall 2022.
- (iv) Introduction to birational geometry 2, Independent University of Moscow, spring 2022.

Являюсь научным руководителем трех магистрантов МФТИ, а также нескольких младшекурсников матфака ВШЭ. В этом году под моим руководством два студента МФТИ успешно защитили бакалаврские дипломные работы на темы “О геометрии поверхностей дель Пеццо с границей” и “О геометрии поверхностей Хирцебруха с границей”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [Go21] A. Golota. *Jordan property for groups of bimeromorphic automorphisms of compact Kähler threefolds*. arXiv:2112.02673, 2021.
- [Kim18] J. H. Kim. *Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties*. Commun. Contemp. Math. 20, no. 3, 1750024, 9 pp, 2018.
- [Lo22] K. Loginov. *Jordan property for groups of bimeromorphic self-maps of complex manifolds with large Kodaira dimension*. arXiv:2209.12032, 2022.
- [MZh18] S. Meng and D.-Q. Zhang. *Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties*. Amer. J. Math. 140, no. 4, 1133–1145, 2018.
- [PSh21] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Automorphism groups of compact complex surfaces*. Int. Math. Res. Notices, 2021(14):10490–10520, 2021.
- [PSh21b] Yu. Prokhorov, C. Shramov. *Finite groups of bimeromorphic selfmaps of non-uniruled Kähler threefolds*. arXiv:2110.05825, 2021. To appear in Sb. Math.
- [Ue75] K. Ueno. *Classification theory of algebraic varieties and compact complex spaces*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 439. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1975. Notes written in collaboration with P. Cherenack.