Отчет по конкурсу “Молодая математика России”

Константин Логинов

1. Результаты, полученные в этом году

1.1. Трехмерные логарифмические многообразия Калаби-Яу. С точки зрения классификации можно выделить три типа проективных алгебраических многообразий: многообразия Фано, многообразия Калаби-Яу и многообразия общего типа. Известно, что многообразия Фано фиксированной размерности являются ограниченными [B16], что делает принципиально возможной их классификацию. Многообразия Фано также представляют интерес с точки зрения проблемы рациональности – одной из центральных задач бирациональной геометрии.

В качестве естественного обобщения многообразий Фано можно рассматривать логарифмические многообразия Фано. Под этим подразумевается многообразие с дивизором границы, удовлетворяющие различным техническим условиям. Мы будем рассматривать пары (X, Δ) из гладкого многообразия X и целого приведенного дивизора границы $\Delta = \sum D_i$, такие что дивизор $-K_X - \Delta$ обилен. Такие пары изучались в работах H. Maeda, T. Fujita, K. Fujita, и других ученых.

Будем говорить, что лог Фано пара является *максимальной*, если сумма коэффициентов его дивизор границы Δ достигает максимального значения. Условие максимальности для логарифмических многообразий Фано было изучено в работе [Lo19-2]. В ней было показано, что количество компонент границы для такой пары ограничено размерностью многообразия, и были изучены максимальные пары в размерностях 2 и 3. В совместной работе с Х. Морагой [LM20] доказана следующая теорема:

Теорема 1 ([LM20])**.** *Максимальные логарифмические многообразия Фано являются торическими, и более того, обладают структурой итерированной башни Ботта, то есть башни торических расслоений на проективные пространства.*

Приложения геометрии пар к вопросам рациональности было сделано в совместной работе с К. Биркаром [BL21]. В ней изучался вопрос о рациональности вырождений поверхностей дель Пеццо (то есть многообразий Фано размерности 2). Такие вырождения естественно возникают в трехмерной программе минимальных моделей – процедуре, применяемой для классификации трехмерной многообразий. В этом контексте удобно работать с парами лог Калаби-Яу, то есть такими парами (X, B), что $K_X + B \equiv 0$, и особенности пары "не слишком плохие". В [BL21] доказано, что если ограничить особенности пары, то "нерациональность" слоев в семействе поверхностей ограничена. Более точно, справедлива следующая

Теорема 2 ([BL21])**.** *Пусть t – вещественное положительное число. Пусть $(X, B) \to Z$ расслоение лог Калаби-Яу типа Фано, где $\dim X = 3$ и $\dim Z \geq 1$. Предположим, что D является компонентой дивизора B с коэффициентом $\geq t$, стягиваемой в точку на Z. Тогда*

- (i) *D бирационально $\mathbb{P}^1 \times C$, где C – гладкая проективная кривая гональности $\mathrm{gon}(C)$, ограниченной в зависимости от t;*
- (ii) *если $t > 1/2$, то род $g(C)$ ограничен в зависимости от t,*
- (iii) *если $t = 1$, то $g(C) \leq 1$.*

В работе [BL21] также сформулирован аналогичный (и гораздо более простой) результат в размерности 2.

В этом году мы занимались обобщением этого результата на "глобальный" случай, то есть случай, когда дивизор на расслоении лог Калаби-Яу не стягивается структурным морфизмом $(X, B) \to Z$. Применяя программу минимальных моделей, эта задача может быть сведена к одному из трех случаев: расслоения на поверхности дель Пеццо, расслоение на коники и случай многообразий Фано. Во всех трех случаях можно рассматривать многообразия с не хуже чем терминальными особенностями. Отметим, что утверждение в последнем случае следует из теоремы об ограниченности многообразий Фано, упоминавшейся выше. В случае расслоений на коники нами доказана следующая теорема:

Теорема 3. *Пусть t – вещественное положительное число. Пусть $\pi\colon X \to Y$ – терминальное расслоение Мори с $\dim X = 3$, $\dim Y = 2$. Предположим, что X рационально связно. Пусть (X, B) лог-каноническая лог Калаби-Яу пара, и D является компонентой дивизора B с коэффициентом $\geq t$. Тогда*

- (i) *степень иррациональности $\mathrm{irr}(D)$ ограничена в зависимости от t,*
- (ii) *если $t > 1/2$, то D бирационально ограничено.*

В следующем году мы планируем рассмотреть случай расслоений на поверхности дель Пеццо, и таким образом завершить изучение вопроса об ограниченности дивизоров на расслоениях лог Калаби-Яу. Этот результат может быть применен к вопросу ограниченности поверхностей типа K3 в трехмерных многообразиях, см. работу [Sa21].

1.2. **Производная длина конечных подгрупп группы Кремоны.** Классификация конечных подгрупп группы Кремоны, то есть группы бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathrm{Cr_n}(\mathbb{C}) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^n)$, является классической задачей бирациональной геомтерии. Тем не менее, ее решение в первом нетривиальном случае, то есть при $n = 2$ (напомним, что $\mathrm{Cr}_1(\mathbb{C}) \simeq \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$) стало доступно только в 2006 году благодаря работе И. Долгачева и В. Исковских [DI09].

Обширность представленного ими списка подсказывает, что задача описания всех конечных подгрупп при $n \geq 3$ является не очень осмысленной. Тем не менее, задача изучения различных свойств таких подгрупп имеет множество мотивировок, например, с точки зрения вопроса существования метрик Кэлера-Эйнштейна на многообразиях Фано.

В последние годы возникло два основных направления для изучения конечных подгрупп в группе Кремоны: во-первых, можно сосредоточиться на некоторых классах таких подгрупп, а во-вторых, можно изучать общие свойства ограниченности для них. Оба подхода принесли свои результаты: например, в работе [Pro12] классифицированы все простые конечные подгруппы в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

В качестве иллюстрации второго подхода приведем следующий результат: в работе [PS17] показано, что конечные подгруппы группы Кремоны являются жордановыми. Это значит, что для каждого натурального n существует константа $I = I(n)$ такая, что для любого рационального (и, более общим образом, рационально связного) многообразия X размерности n и для любой подгруппы $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ существует нормальная абелева подгруппа $A \subset G$ индекса не больше I. В случае рационального X и $n \geq 3$ удается получить точную оценку константы I.

С совместной работе с Е. Ясинским мы рассматриваем класс разрешимых конечных групп и работаем с таким естественным инвариантом, как производная длина, то есть длина ряда из последовательных коммутантов. В первую очередь, не опираясь на классификацию, мы доказали следующее утверждение:

Предложение 4. *Пусть $G \subset \mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ – разрешимая конечная подгруппа. Тогда для ее производной длины выполнено* $\mathrm{dl}(G) \leq 4$, *и эта оценка точна.*

Далее мы рассматриваем существенно более сложный случай конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. Мы применяем G-эквивариантную программу минимальных моделей, сводящую задачу к случаю G-эквивариантных расслоений на коники, расслоений на поверхности дель Пеццо и многообразий Фано. В каждом из этих случаев мы планируем использовать методы современной бирациональной геометрии, чтобы получить точную оценку на производную длину $\mathrm{dl}(G)$ конечной подгруппы $G \subset \mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$.

2. Опубликованные и поданные в печать работы

(i) Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations (joint with C. Birkar)

In this paper we investigate non-rationality of divisors on 3-fold log Fano fibrations $(X, B) \to Z$ under mild conditions. We show that if D is a component of B with coefficient $\geq t > 0$ which is contracted to a point on Z, then D is birational to $\mathbb{P}^1 \times C$ where C is a smooth projective curve with gonality bounded depending only on t. Moreover, if $t > \frac{1}{2}$, then genus of C is bounded depending only on t.

Работа опубликована: Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), vol. 2021, no. 779, 2021, pp. 167-188.

(ii) Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers (joint with Joaquín Moraga)

We prove that maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers. As an application, we prove that in each dimension, there is a unique maximal snc Fano variety satisfying Friedman's d-semistability condition.

Работа подана в Journal of Algebra, получен положительный отзыв.

(iii) On the derived length of finite groups acting on rationally connected threefolds. (joint with E. Yasinskiy)

We study boundedness properties of finite subgroups of Cremona group of rank at most 3, and more generally, of the group of automorphisms of rationally connected complex projective varieties of dimension at most 3. We consider the case of solvable sugroups. Our aim is to to compute the exact upper bound for the derived length of such subgroups.

In preparation.

3. Участие в конференциях и школах

(i) Conference "SIMC Welcomes Postdocs-2020", 22–23 April 2021, Steklov Mathematical Institute, Moscow. Talk "Log Fano varieties and their applications"
(ii) Conference "Multidimensional Residues and Tropical Geometry", 14–18 June 2021, Mathematical Center "Sirius Sochi, Russia. Talk "Boundedness of divisors on Fano fibrations"
(iii) Conference "LUTSINOfest", Lutsino, Moscow region, Russia, 4–6 July 2021. Talk "Boundedness of irrationality on Fano fibrations".

(iv) Conference “Primorie Mathematical Fair”, Vladivostok, Russia, 21–26 July 2021. Talk “Boundnedness of divisors on Calabi-Yau fibrations".

(v) Seminar of the Laboratory of Algebraic Geometry and Homological Algebra, Moscow Institute of Physics and Technology, 8 April 2021. Talk “On the geometry of logarithmic Fano varieties”.

(vi) Iskovskikh seminar, Steklov Mathematical Institute, 15 April 2021, talk “A finiteness theorem for elliptic Calabi-Yau threefolds”.

(vii) Iskovskikh seminar, Steklov Mathematical Institute, 18 November 2021, talk “Termination of flips and fundamental groups (after Joaquin Moraga)”.

4. Работа в научных центрах и международных группах

Являюсь научным сотрудником в МЦМУ “Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук”, младшим научным сотрудником в Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, научным сотрудником в Лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ.

5. Педагогическая деятельность

Прочитанные в этом году курсы:

(i) Введение в бирациональную геометрию, Научно-образовательный центр Математического института им. В.А. Стеклова, осенний семестр 2021, 2 часа в неделю,

(ii) Algebraic Geometry, Start-up course, Math in Moscow Program, весенний семестр 2021, осенний семестр 2021. Лекции и и семинары, 3 часа в неделю,

(iii) Продолжение спецкурса “Введение в алгебраическую геометрию”, МФТИ, весенний семестр 2021. Полтора часа в неделю.

Также являюсь научным руководителем 5 студентов: магистрантки МФТИ 1-го года, бакалавров 4-го года в МФТИ, второкурсника матфака ВШЭ. В этом году под моим руководством Ксения Квитко успешно защитила бакалаврскую дипломную работу (МФТИ) на тему “О геометрии трёхмерных логарифмических многообразий Фано”.

Список литературы

[B16] C. Birkar. *Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties.* arXiv:1609.05543, 2016.

[B16-2] C. Birkar. *Singularities on the base of a Fano type fibration.* J. Reine Angew Math., J. Reine Angew Math., 715 (2016), 125–142.

[BL21] C. Birkar, K. Loginov. *Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations.* J. Reine Angew Math., 779 (2021), 167–188.

[DI09] I. V. Dolgachev & V. A. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2009.

[Lo19] K. Loginov. *On non-rational fibers of del Pezzo fibrations.* Mathematical Notes 106 (6), 2019.

[Lo19-2] K. Loginov. *On semistable degenerations of Fano varieties.* To appear in European Journal of Mathematics.

[LM20] K. Loginov, J. Moraga *Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers.* arXiv e-print, 2012.00266, 2020.

[Ma83] H. Maeda, *Classification of logarithmic Fano* 3*-folds.* Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 59 (6), 1983, 245–247.

[Pro12] Y. Prokhorov, *Simple finite subgroups of the Cremona group of rank* 3. J. Algebr. Geom., 21(3):563–600, 2012.

[PS17] Y. Prokhorov & C. Shramov. Jordan constant for Cremona group of rank 3. *Mosc. Math. J.*, 17(3):457–509, 2017.

[Sa21] T. Sano, On birational boundedness of some Calabi-Yau hypersurfaces arXiv:2101.03708.