

# Отчет по конкурсу “Молодая математика России”

Константин Логинов

## 1. РЕЗУЛЬТАТЫ, ПОЛУЧЕННЫЕ В ЭТОМ ГОДУ

**1.1. Корегулярность трехмерных многообразий Фано.** Классически изучаемые в алгебраической геометрии, многообразия Фано представляют собой базовые “строительные блоки”, которые важны для понимания геометрии других классов многообразий.

Напомним, что многообразии  $X$  называются многообразиями Фано, если его антиканонический класс  $-K_X$  обилен. Одним из способов изучения таких многообразий является анализ их (плюри-)антиканонической линейной системы  $| -mK_X |$  при  $m \geq 1$ .

В трехмерном случае В. Шокуровым было доказано, что существует гладкий элемент в антиканонической линейной системе. Это позволило использовать индуктивные аргументы для сведения изучения геометрии трехмерных многообразий Фано к изучению их гладких антиканонических элементов. Этот подход привел к классификации гладких многообразий Фано размерности 3: известно, что они принадлежат к 105 деформационным семействам.

Изучение особых элементов в  $| -mK_X |$  также важно. Для изучения их особенностей были введены следующие инварианты. Двойственный комплекс дивизора  $D$  с простыми нормальными пересечениями на гладком многообразии – это топологический инвариант, который отражает комбинаторные свойства этого дивизора. Это понятие можно обобщить на случай лог-канонических пар, причем топологический тип такого комплекса (включая его размерность) не зависит от выбора лог-разрешения.

Определение регулярности лог-канонической лог Калаби-Яу пары и его обобщение на все лог Калаби-Яу структуры на данном многообразии Фано ввели В. Шокуров и Х. Морага соответственно. Регулярностью многообразия Фано по определению называется максимальная регулярность лог-канонических дополнений на данном многообразии. Для удобства было предложено понятие корегулярности, связанное с регулярностью и размерностью многообразия.

Изучение корегулярности многообразий Фано является активной областью исследований, однако на данный момент значение корегулярности известно для

немногих конкретных семейств многообразий Фано. Известно, что для торических многообразий Фано корегулярность равна 0. Ожидается, что многообразия Фано с корегулярностью 0 обладают некоторыми хорошими свойствами. Мы сфокусировались на гладких многообразиях Фано размерности 3. Нами был получен следующий результат (мы используем стандартные обозначения для семейств гладких трехмерных многообразий Фано из классификации Исковских-Мори-Мукаи).

**Теорема 1** ([ALP23]). *Пусть  $X$  – гладкое трехмерное многообразие Фано. Положим*

$$\aleph = \{1.1, 1.2\}, \quad \beth = \{1.3, 1.4\}, \quad \beth = \{1.5\}, \\ \beth = \{1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 1.10, 1.11, 2.1, 10.1\}.$$

*Тогда*

- (i) *если  $X$  – любое гладкое трехмерное многообразие Фано, принадлежащее любому семейству, кроме семейств в  $\aleph, \beth, \beth, \beth$ , то  $\text{coreg}(X) = 0$ ,*
- (ii) *если  $X$  – общий элемент в одном из семейств  $\aleph$ , то  $\text{coreg}(X) \geq 1$ ,*
- (iii) *если  $X$  – общий элемент в одном из семейств  $\beth$ , то  $\text{coreg}_1(X) = 2$ ,*
- (iv) *если  $X$  – общий элемент в семействе  $\beth$ , то  $\text{coreg}(X) \leq 1$ ,*
- (v) *если  $X$  – общий элемент в одном из семейств  $\beth$ , то  $\text{coreg}(X) = 0$ ,*

В этом результате под первой корегулярностью  $\text{coreg}_1(X)$  мы имеем в виду значение корегулярности, которое может быть получено на элементах антиканонической линейной системы. Мы ожидаем, что наш результат может быть использован в теории зеркальной симметрии, а также что он послужит отправной точкой для дальнейших исследований, в том числе для вычисления корегулярности для других классов многообразий Фано.

## 2. ОПУБЛИКОВАННЫЕ И ПОДАННЫЕ В ПЕЧАТЬ РАБОТЫ

- (i) Coregularity of smooth Fano threefolds.  
(joint with A. Avilov and V. Przyjalkowski).  
arXiv:2309.16784. Submitted.

## 3. УЧАСТИЕ В КОНФЕРЕНЦИЯХ И ШКОЛАХ

- (i) Конференция, посвященная 75-летию механико-математического факультета ТГУ, Томск, 2–5 октября 2023, Доклад “О группах автоморфизмов комплексных многообразий”.
- (ii) Конференция по комплексному анализу и его приложениям, Красноярск, 11–15 сентября 2023, Доклад “Корегулярность многообразий Фано”.

- (iii) Конференция математических центров, Майкоп, 10–15 октября 2023, Доклад “Корегулярность многообразий Фано”.
- (iv) Конференция по алгебраической геометрии, Тайбей, Тайвань, 31 июля – 4 августа 2023, Доклад “Coregularity of Fano threefolds”.
- (v) “On K-stability of (log) Fano varieties”. Moscow Institute of Physics and Technology, February 2023.
- (vi) “Regularity of smooth Fano threefolds”, HSE Laboratory of Algebraic Geometry seminar, February 2023.

#### 4. РАБОТА В НАУЧНЫХ ЦЕНТРАХ И МЕЖДУНАРОДНЫХ ГРУППАХ

Являюсь научным сотрудником в МЦМУ “Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук”, младшим научным сотрудником в Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ, научным сотрудником в Лаборатории алгебраической геометрии и гомологической алгебры МФТИ.

#### 5. ПЕДАГОГИЧЕСКАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ

Прочитанные в этом году курсы:

- (i) Introduction to Birational Geometry, course at Moscow Institute of Physics and Technology, spring 2023.
- (ii) Algebraic geometry, Math in Moscow, lectures and problem sessions, spring 2023.

Я являюсь научным руководителем аспиранта НИУ ВШЭ Ксении Квитко. В этом году Ксения заняла второе место на конкурсе Мебиус с работой “К-стабильность трехмерных лог Фано пар с неприводимой границей”. Также являюсь научным руководителем двух магистрантов МФТИ, а также нескольких бакалавров матфака ВШЭ.

#### 6. ИЗНАЧАЛЬНЫЕ ПЛАНЫ

**6.1. Maximal log Fano varieties.** We say that log smooth projective pair  $(X, \Delta)$  is a *log Fano pair* if  $-K_X - \Delta$  is ample. We say that a log Fano pair is *maximal* if  $\Delta$  has  $\dim X$  components. Our aim is to show that such pair is toric. Moreover, we want to prove that  $X$  is a so called *generalized Bott towers*. This means that  $X$  is an iterated projective bundle over a point. This problem is closely related to study of semistable degenerations of Fano varieties. We plan to prove that maximal semistable degeration is unique in any dimension.

**6.2. Boundedness of irrationality for fibers of del Pezzo fibrations.** We plan to answer the Blanc’s question for the genus  $g(C)$ . To do this, one has to find an explicit estimate on  $t$  in Shokurov’s conjecture which bounds singularities of pairs  $(X, tF)$  in terms of singularities of  $X$ .

**6.3. K-(un)stability of singular del Pezzo surfaces.** Our goal is to find destabilising families and thus prove K-unstability of (some polarizations on) singular del Pezzo surfaces.

## 7. ЧТО ПОЛУЧИЛОСЬ

**7.1. Максимальные лог Фано пары.** Получилось доказать, что максимальные логарифмические лог Фано пары являются торическими. Результаты опубликованы в работе [LM20]. Используя методы, развитые в этой статье, а также в работе [Lo19], в этом году это позволило исследовать корегулярность трехмерных многообразий Фано.

**7.2. Ограниченность иррациональности.** В настоящее время гипотеза Бланка остается открытой. Обобщение этой гипотезы приведено в списке открытых проблем в бирациональной геометрии [B23]:

**Гипотеза 2** (Birkar-Loginov). Пусть  $d \in \mathbb{N}$  and let  $t \in \mathbb{R}^{>0}$ . Предположим, что  $f: (X, B) \rightarrow Z$  является расслоением лог Калаби-Яу типа Фано, где  $\dim X = d$ . Предположим, что  $S$  это компонента границы  $B$  с коэффициентом  $\geq t$ , стягиваемая в точку на  $Z$ . Тогда существует рациональное отображение  $S \dashrightarrow T$ , чей общий слой рационально связан и  $T$  является гладким проективным многообразием с ограниченной гональностью.

Насколько мне известно, сейчас над решением этой проблемы работает группа китайских ученых.

**7.3. K-стабильность поверхностей дель Пеццо.** Проблема характеристики K-стабильных поверхностей дель Пеццо с произвольной поляризацией до сих пор открыта. Частичные результаты приведены в кандидатской диссертации Н. Висванатан [Vi22].

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [ALP23] A. Avilov, K. Loginov, V. Przyjalkowski *Coregularity of smooth Fano threefolds..* arXiv:2309.16784., 2023.
- [B23] C. Birkar. *Some open problems in birational geometry.* Notices of the International Consortium of Chinese Mathematicians, 1 (11), 83–97, 2023.
- [BL21] C. Birkar, K. Loginov. *Bounding non-rationality of divisors on 3-fold Fano fibrations.* Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 779, 167–188, 2021.

- [dFKX17] T. de Fernex, J. Kollár, and C. Xu, *The dual complex of singularities*. Higher dimensional algebraic geometry, in honour of Professor Yujiro Kawamata's sixtieth birthday, Adv. Stud. Pure Math., vol. 74, Math. Soc. Japan, Tokyo, 103–129 (2017).
- [FFMP22] F. Figueroa, S. Filipazzi, J. Moraga, J. Peng, *Complements and coregularity of Fano varieties*. arXiv:2211.09187, 2022.
- [KX16] J. Kollár and C. Xu, *The dual complex of Calabi–Yau pairs*. Invent. Math., vol. 205, no. 3, 527–557 (2016).
- [Lo19] K. Loginov. *On semistable degenerations of Fano varieties*. European Journal of Mathematics, vol. 8, 991–1005, 2022.
- [LM20] K. Loginov, J. Moraga. *Maximal log Fano manifolds are generalized Bott towers*. Journal of Algebra, vol. 612, 110–146, 2022.
- [LP18] V. Lunts, V. Przyjalkowski, *Landau–Ginzburg Hodge numbers for mirrors of del Pezzo surfaces*. Adv. Math., **329** (2018), 189–216.
- [Mo22] J. Moraga. *Coregularity of Fano varieties*. arXiv:2206.10834, 2022.
- [Sh00] V. V. Shokurov. *Complements on surfaces*. Journal of Mathematical Sciences, Vol. 102, No.2 (2000).
- [Vi22] N. Viswanathan. *Fano varieties: positivity, K-stability and more*. PhD Thesis, University of Edinburgh, 2022.