Молодая математика России
Отчёт Полянского Александра за 2022 год

1 Результаты, полученные в этом году

1.1 Задачи о покрытии полиномиальными полосками

Теорема Банга [Ban51] в частном случае утверждает, что *если шар в d-мерном евклидовом пространстве покрыт полосками, то сумма ширин полосок по крайней мере диаметр этого шара.* Здесь *полоской ширины* $2w$ называется метрическая w-окрестность гипорплоскости в d-мерном евклидовом пространстве. В случае, когда полоски имеют одинаковую ширину, то утверждение теорема Банга можно переформулировать следующим образом. *Для любого набора из n гиперплоскостей в Евклидовом d-мерном пространстве найдётся точка в единичном шаре на расстоянии по крайней мере $1/n$ от этих гиперплоскостей.*

Сравнительно недавно были получены полиномиальными обобщения теоремы Банга; сферический евклидов случай изучался в работе Юфея Жао [Zha22], а комплексный — в работе Оскара Ортега-Морено [OM22]. Мотивированные этими результатами Алексей Глазырин, Роман Карасёв и я в [1], [2] доказываем следующие результаты:

- Для любого действительного многочлена степени n от d переменных найдётся точка внутри единичного d-мерного евклидова шара на расстоянии $1/n$. (Это полиномиальное обобщение теоремы Банга для полосок одинаковой ширины.)

- Доказывается гипотеза Цзилина Цзяна и А.П. от 2017 года о покрытии сферы сферическими сегментами (замкнутыми областями на сфере, расположенными между двумя параллельными гиперплоскостями). Гипотеза утверждает, что если набор сферических сегментов покрывает единичную сферу, то их суммарная сферическая ширина по крайней мере π. (Это обобщение так называемой гипотезы Лазло Фейеш Тота о покрытии шара зонами, доказанная Цзином Цзяном и А.П. в 2017 году.)

- Точная неоднородная теорема о покрытии комплексными полосками, обобщающая однородный результат Ортего-Морена. Пусть $P_1, \dots, P_n$ ненулевые многочлены комплексного переменного от d переменных и $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ таковы, что $\sum_{i=1}^n \delta_i^2 \deg P_i = R$. Тогда найдётся точка в единичном шара $B^{2d}(R) \subset \mathbb{C}^d$ на расстоянии по крайней мере δ_k от множества нулей P_k для всех k.

- Неточная аналог этого утверждения в сферическом евклидовом случае.

Остаётся довольно много открытых задач связанных с полиномиальными полосками. Наиболее непонятной на сегодняшний день является следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Пусть многочлены $P_1, \dots, P_n$ от d переменных имеют ненулевое ограничение на евкливдову единичную сферу $S \subset \mathbb{R}^d$ и $\delta_1, \dots, \delta_n > 0$ таковы, что $\sum_{i=1}^n \delta_i \deg P_k \le \pi/2$. Тогда найдётся точка $p \in S$ такая, что для всех k эта точка p находится на сферическом расстоянии по крайней мере δ_k от пересечения множества нулей P_k со сферой S.*

1.2 Теоремы типа Тверберга

Теорема Тверберга является одним из основополагающих результатов современной дискретной и выпуклой геометрии. Она была доказана Твербергом [Tve66] в 1966 году и утвержает, что для любого множества из $(r-1)(d+1)+1$ точки в $\mathbb{R}^d$ найдётся разбиение точек на r частей такое, что их выпуклые оболочки пересекались.

В этом году мы продолжили исследование теорем типа Тверберга. В частности исследовались так называемые максимальные паросочетания. Для чётного числа точек на плоскости максимальным паросочетанием называется такое совершенное паросочетание, которое максимизирует сумму евклидовых расстония между точеками. В 1995 году Анди Фингерхат выдвинул следующую гипотезу в контексте минимальных звёзд Штейнера. *Для любого ребра максимального паросочетания рассмотрим эллипс с эксцентриситетом $2/\sqrt{3}$, фокусы которого являются концами этого ребра. Тогда множества ограниченные этими эллипсами пересекаются.* В готовящемся препринте [3] с моей студенткой Полиной Барабанщиковой мы доказываем эту гипотезу.

Для доказательства использовался подход со перестройкой паросочетаний в чём-то напоминающий подход с перестройкой r-разбиений, который Вречица и Тверберг [TV93] (а позднее Руднев [Rou01]) использовали для доказательства теоремы Тверберга.

2 Опубликованные и поданные в печать работы

[1] A. Glazyrin, R. Karasev, A. Polyanskii, “Covering by planks and avoiding zeros of polynomials”, *International Mathematics Research Notes*, rnac259. preprint

2 A. Glazyrin, R. Karasev, A. Polyanskii, “Extensions of polynomial plank covering theorems”. preprint

[3] P. Barabanchshikova, A. Polyanskii, “Tverberg meets Optimization: Proof of the Fingerhut conjecture”. preprint

[4] O. Pirahmad, A. Polyanskii, A. Vasilevskii, “Intersecting diametral balls induced by a geometric graph”, *Discrete & Computational Geometry* (2022). preprint

[5] N. Chernega, A. Polyanskii, R. Sadykov, “Disjoint edges in geometric graphs”, *Graphs and Combinatorics*, 38, Article number: 162 (2022). preprint

3 Участие в конференциях, семинараъ и школах

- Делал доклад (дистанционно) на семинаре *Big Budapest Combinatorics + Geometry Seminar* (рук. János Pach, Dömötör Pálvölgyi, Géza Tóth) 14 февраля. Доклад *Polynomial plank covering theorem.*

https://coge.elte.hu/seminar.html

- Был докладчиком на секции *Комбинаторика, дискретная геометрия и случайные структуры* (рук. О.Н. Герман, А.Б. Купавский, А.М. Райгородский) на конференции **Международных Математических Центров** (7–11 ноября, Москва). Доклад *Оптимизация помогает Твербергу.*

  https://mathcenter.ru/conf-mathcenters-2

4 Педагогическую деятельность

- Веду годовой курс по дискретной геометрии для англомагистрантов МФТИ.
- Был научным руководителем одной бакалаврской работы (П. Барабанщикова). В настоящий момент под моим руководством сейчас работают 2 аспиранта (А. Голованов, Р. Садыков), 2 магистра (П. Барабанщикова) и 2 бакалавра (С. Арутюнян и Ф. Герасимов). В декабре этого года А. Голованов будет защищать диссертацию по теме “Дистанционные задачи дискретной геометрии”.

Список литературы

[Ban51] T. Bang, *A solution of the"plank problem"*, Proceedings of the American Mathematical Society **2** (1951), no. 6, 990–993.

[OM22] O. Ortega-Moreno, *The complex plank problem, revisited*, Discrete & Computational Geometry (2022), 1–5.

[Rou01] J.-P. Roudneff, *Partitions of Points into Simplices with k-dimensional Intersection. Part I: The Conic Tverberg's Theorem*, European Journal of Combinatorics **22** (July 2001), no. 5, 733–743.

[TV93] H. Tverberg and S. Vrećica, *On Generalizations of Radon's Theorem and the Ham Sandwich Theorem*, European Journal of Combinatorics **14** (May 1993), no. 3, 259–264.

[Tve66] H. Tverberg, *A Generalization of Radon's Theorem*, Journal of the London Mathematical Society **s1-41** (1966), no. 1, 123–128.

[Zha22] Y. Zhao, *Exploring a planet, revisited*, The American Mathematical Monthly (2022), 1–3.