Молодая математика России
Отчёт Полянского Александра за 2023 год

1 Результаты, полученные в этом году

1.1 Теоремы типа Тверберга

Теорема Тверберга является одним из основополагающих результатов современной дискретной и выпуклой геометрии. Она была доказана Твербергом [Tve66] в 1966 году и утверждает, что для любого множества X из $(r-1)(d+1)+1$ точек в $\mathbb{R}^d$ найдётся разбиение X на r частей такое, что выпуклые оболочки этих частей имеют непустое пересечение.

В этом году я продолжил исследование теорем типа Тверберга. В частности исследовались так называемые максимальные паросочетания. Для чётного числа точек в $\mathbb{R}^d$ *максимальным паросочетанием* называется такое совершенное паросочетание, которое максимизирует сумму евклидовых расстояний между точками. В 2022 году в совместной работой с моей студенткой Полиной Барабанщиковой мы [1] доказали гипотезу Анди Фингерхата из вычислительной геометрии от 1995 года. *На плоскости дано чётное число точек. Для любого ребра максимального паросочетания для этого набора точек рассмотрим эллипс с эксцентриситетом $2/\sqrt{3}$, фокусы которого являются концами этого ребра. Тогда множества ограниченные этими эллипсами пересекаются.* В 2023 году мы [2] доказали, что если для каждого рёбра максимального паросочетания на плоскости построить круг с диаметров в этом ребре, то получившиеся круги пересекаются. Наша идея была в том, чтобы доказать эту аналогичное утверждение в больших размерностях или для нормированных пространств (евклидов шар заменяется на шар в соответствующем пространстве). В этой же работе мы также доказали аналогичные свойства максимальных остовных деревьев для конечного набора точек в $\mathbb{R}^d$.

Для доказательств использовался метод перестроек (разбиений, паросочетаний, остовных деревьев), который использовался Вречицей и Твербергом [TV93] (а позднее Рудневым [Rou01]) для доказательства теоремы Тверберга.

Также используя подобные методы мне совсем недавно удалось доказать безразмерную цветную теорему Тверберга, которая алгоритмически улучшает имеющиеся в этом направлении результаты [ABMT20, CM22] (а также получены точные константы). *Пусть множества $X_1, \dots, X_m$ состоят из n точек в $\mathbb{R}^d$. Тогда существует цветное m-разбиение множеств $X_1 \cup \dots \cup X_m$ (то есть в каждом множестве разбиения в точности одна точки из X_i) на n множеств и шар B радиуса $\frac{1}{\sqrt{m}} \operatorname{diam} X_1 \cup \dots \cup X_m$ такие, что B пересекает выпуклую оболочку каждого разбиения.* Результаты в этом направлении пока не опубликованы, работа над данной темой ещё ведётся.

1.2 Теоремы Алона–Боппаны для взвешенных графов

Знаменитая теорема Алона–Боппаны [Nil91] из спектральной теории графов утверждает, что для d-регулярного графа G второе собственное значение $\lambda_2(G)$ удовлетворяет неравенству $\lambda_2(G) \geq 2\cos\frac{\pi}{r+1}\sqrt{d-1}$, где диаметр графа G не менее $2r$. (Здесь я привожу неравенство в довольно точной форме, предложенной Цзином Цзяном [Jia19] в 2017 году; изначально Алон и Боппана получили гораздо менее точное неравенство.) За последние 30 лет было получено довольно много неравенств, которые обобщали неравенство Алона–Боппаны для тех или иных групп графов в том числе для графов, которых средняя степень остаётся довольно большой при удалении шаров радиуса r, некоторых групп взвешенных графов.

В недавнем препринте [3] с моим аспирантом Ринатом Садыковым мы доказали несколько неравенств типа Алона–Боппаны для регулярных взвешенных графов. Приведу самое интересное следствие из нашей работы. *Пусть средняя комбинаторная степень d (среднее число рёбер из одной вершины) w-регулярного (сумма весов рёбер, инцидентных любой вершине, равна w) взвешенного графа G не меньше 8 и в графе нет вершин большого веса (точная формулировка этого условия приводится в статье). Тогда второе собственное значение $\lambda_2(G)$ взвешенной матрицы инцидентности графа G, удовлетворяет неравенству $\lambda_2(G) \geq 2\cos\frac{\pi}{r+1}w\frac{\sqrt{d-1}}{d}$.* Основная идея доказательство состоит в том, что вместо графа G можно работать с бесконечным графом, являющимся универсальным накрытием G, и исследовать его спектральные свойства.

2 Опубликованные и поданные в печать работы за годы

[1] P. Barabanshchikova, A. Polyanskii, "Intersecting ellipses induced by a max-sum matching", *Journal of Global Combinatorics*, 2023.

[2] P. Barabanshchikova, A. Polyanskii, "Intersecting diametral balls induced by a geometric graph - II", *Discrete Mathematics*, Volume 347, Issue 1, January 2024, 113694.

[3] A. Polyanskii, R. Sadykov, "Alon–Boppana-type bounds for weighted graphs", preprint, 2023.

[4] A. Glazyrin, R. Karasev, A. Polyanskii, "Extensions of polynomial plank covering theorems", *Bulletin of the London Mathematical Society*, accepted.

3 Участие в конференциях, семинарах и школах

- Делал доклад на семинаре *Joint seminar of the ICMS and the MFI Department*, Институт математики и информатики Болагарской академии наук, 7 марта. Доклад *Plank Problems: Discrete Geometry and Convexity.*

  https://math.bas.bg/event/joint-seminar-of-the-icms-and-the-mfi-department-3/?lang=en

- Делал доклад на конференции *Sphere packings, coverings, and spherical codes SPCSC2023* (28–31 мая, София). Доклад *Polynomial plank covering theorems.*

  https://icms.bg/sphere-packings-coverings-and-spherical-codes-spcsc2023/

- Был приглашённым докладчиком на конференции *Discrete and convex geometry* (4–8 сентября, Будапешт). Доклад *Polynomial plank covering theorems.*

  https://erdoscenter.renyi.hu/events/convex-and-discrete-geometry-workshop

4 Педагогическую деятельность

- Вел годовой курс (2022–2023 учебный год) по дискретной геометрии для англо-магистрантов МФТИ.
- Был научным руководителем трёх бакалавров (С. Арутюнян, Ф. Герасимов, А. Метелин), двух магистров (П. Барабанщикова, В. Рао) и одного аспиранта (Р. Садыков).
- Соорганизатор еженедельного научного семинара лаборатории комбинаторных и геометрических структур МФТИ (где большинство участников – студенты и аспиранты).

5 Итоги работы за 2021–2023 годы

В изначальном проекте было предложено три направления для исследования:

1. Вопросы о покрытиях полосками;
2. Комбинаторные неравенства для двудольных углов многогранников;
3. Неравенства из спектральной теории графов (включая обобщения неравенства Алона–Боппаны).

В рамках первого направления в двух совместных статьях с Алексеем Глазыриным и Романом Карасевым нам удалось доказать полиномиальные версии теоремы о полосках (исследовались сферический, комплексный и действительные случаи), которые обобщают знаменитую теорему Банга. Получившиеся результаты являются центральными за последние три года работы. В моём проекте упоминаются задача, обобщающая сферическую версию теоремы Гудмана–Гудмана (которая была доказана мной в 2020 году). Мне не удалось продвинуться по это задаче.

К сожалению, в рамках второй задачи мне не удалось продвинуться. Моя изначальная идея, которую я хотел использоваться для построения контрпримера к гипотезе Акопяна и Карасёва о двудольных углах комбинаторно-эквивалентных выпуклых многогранников (упоминается в проекте), оказалась неверной.

В рамках третьего направления в двух совместных статьях (одна с Цзилином Цзяном, другая с моим аспирантом Ринатом Садыковым) мы исследовали две задачи: доказательство неравенства Алона–Боппаны для более широкого класса графов (приводилась в заявке) и задача о существовании конечного семейства запрещённых индуцированных подграфов, которое задаёт графы со знаком с ограниченным снизу собственным значением.

Помимо этого за эти три года были написано несколько статьей с моими студентами и аспирантами в направлениях которые не приводятся в заявке: три статьи о результатах типа Тверберга (одна с Олимджоном Пирахмадом и Алексеем Василевским, а другие две с Полиной Барабанщиковой), а также работа о непересекающихся ребрах в геометрических графах (совместно с аспирантом Ринатом Садыковым и студентом Никитой Чернегой).

В целом можно выделить, что за последние три года в моих работах всё больше начинают применяться оптимизационные методы (см. работы все о полосках и о теоремах типа Тверберга).

Список литературы

[ABMT20] K. Adiprasito, I. Bárány, N. H Mustafa, and T. Terpai, *Theorems of carathéodory, helly, and tverberg without dimension*, Discrete & Computational Geometry **64** (2020), no. 2, 233–258.

[CM22] A. Choudhary and W. Mulzer, *No-dimensional tverberg theorems and algorithms*, Discrete & Computational Geometry **68** (2022), no. 4, 964–996.

[Jia19] Z. Jiang, *On spectral radii of unraveled balls*, Journal of Combinatorial Theory, Series B **136** (2019), 72–80.

[Nil91] A. Nilli, *On the second eigenvalue of a graph*, Discrete Math. **91** (1991), no. 2, 207–210.

[Rou01] J.-P. Roudneff, *Partitions of Points into Simplices with k-dimensional Intersection. Part I: The Conic Tverberg's Theorem*, European Journal of Combinatorics **22** (July 2001), no. 5, 733–743.

[TV93] H. Tverberg and S. Vrećica, *On Generalizations of Radon's Theorem and the Ham Sandwich Theorem*, European Journal of Combinatorics **14** (May 1993), no. 3, 259–264.

[Tve66] H. Tverberg, *A Generalization of Radon's Theorem*, Journal of the London Mathematical Society **s1-41** (1966), no. 1, 123–128.