

АЛГЕБРА, ВТОРОЙ СЕМЕСТР

Программа курса

**0. Фрагменты теории категорий и функторов**

- 0.0. Начально-конечные объекты
- 0.1. Категории  $SET^*$ ,  $TOP^*$ ;  $MON$ ,  $GRP$ ,  $AB$
- 0.2. Функтор  $\pi_1 : TOP^* \rightarrow GRP$
- 0.3. О функторах  $\pi_{>1} : TOP^* \rightarrow AB$ ; алгебра Уайтхеда
- 0.4. Мономорфизмы и эпиморфизмы
- 0.5. Уравнители и коуравнители
- 0.6. Декартово замкнутые категории
- 0.7.  $Z^{Y \times X} \cong (Z^Y)^X$ ,  $Z^{Y+X} \cong Z^Y \times Z^X$ ,  $(Z \times Y)^X \cong Z^X \times Y^X$
- 0.8. Сопряжённые функторы

**1. Абелевы категории**

- 1.0. Совпадение сумм и произведений
- 1.1. Первые примеры:  $G\_MOD$  и  $R - MOD$
- 1.2. Ядра и коядра
- 1.3. Категории комплексов
- 1.4. Точные последовательности
- 1.5. Аддитивная структура на множествах морфизмов
- 1.6. Инъективные и проективные объекты
- 1.7. Резольвенты
- 1.8. Категории предпучков на окольцованных пространствах
- 1.9. Теорема Митчелла-Фрейда (формулировка)

**2. Группы – 2**

- 2.0. Перечисление малых групп
- 2.1. Силовские подгруппы конечных групп
- 2.2. Композиционные ряды; теорема Жордана-Гельдера
- 2.3. Разрешимые и нильпотентные группы
- 2.4. Нильпотентность  $p$ -групп
- 2.5. Разрешимость  $(p, q)$ -групп (формулировка т. Бернсайда)
- 2.6. Абелевы нормальные делители в подгруппах порядка  $\leq 23$
- 2.7. Расширения групп с абелевым ядром
- 2.8. Когомологии групп  $H^2(G; M)$

**3. Производные функторы**

- 3.0. Полуточные функторы
- 3.1. Определение производных функторов
- 3.2. Существование и единственность производных функторов
- 3.3. Производные функтора  $\text{invar} :: G\_MOD \rightarrow AB$

- 3.4. Стандартная резольвента
- 3.5. Когомологии групп  $H^1(G; M)$  и  $H^3(G; M)$
- 3.6. Группа  $H^1$  скрещенные морфизмы
- 3.7. Группа  $H^1$  и функциональные уравнения
- 3.8. Внешние действия  $G \rightarrow \text{Out}(N)$
- 3.9. Группы  $H^3$  и препятствия к расширениям групп
- 3.10. Классификация общих расширений групп
- 4. **Элементы теории представлений конечных групп**
  - 4.0. Категории  $G\text{-MOD}$
  - 4.1. Контрагredientный кофунктор  $(V, \rho) \mapsto (V^*, \rho^*)$
  - 4.2. Операции  $\oplus$ ,  $\cap$  и  $\otimes$  в  $G\text{-MOD}$
  - 4.3. Неприводимые представления
  - 4.4. Теорема Машке о полной приводимости
  - 4.5. Характеры и их поведение относительно операций
  - 4.6. Ортогональность характеров
  - 4.7. Регулярное представление и его разложение
  - 4.8. Формула Бернсайда
  - 4.9. Доказательство т. Бернсайда о разрешимости  $(p, q)$ -групп
  - 4.10. Конечные группы порядка  $\leq 60$
- 5. **Кольца – 2**
  - 5.0. О размерности колец
  - 5.1. Когомологическая размерность
  - 5.2. Размерность Крулля
  - 5.3. Нильрадикал и радикал Джекобсона
  - 5.4. Артиновы кольца
  - 5.5. Нётеровы локальные кольца
  - 5.6. Расширения локальных колец; ветвление
  - 5.7. Размерность Крулля
  - 5.8. Кольца целых в полях алгебраических чисел
- 6. **Разное**
  - 6.1. Тензорные и таннакиевы категории
  - 6.2. Тензорная алгебра векторного пространства
  - 6.3. Симметрическая алгебра векторного пространства
  - 6.4. Внешняя алгебра векторного пространства
  - 6.5. Действие эндоморфизмов на внешней алгебре
  - 6.6. Треугольные группы и замощения
  - 6.7. Картографические группы
  - 6.8. Гиперболические группы
  - 6.9. Элементы алгебры ординалов

*Г.Б. Шабат*