Степенные последовательности для графов без петель

Рухович А.

Основная Теорема. *Связный граф без петель (но, возможно, с кратными ребрами) с n вершинами степеней $d_1, d_2, ..., d_n \geq 1$ существует тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

1) $d_1 + d_2 + ... + d_n$ делится на 2;

2) $2d_i \leq d_1 + d_2 + ... + d_n$ для любого i;

3) $2n - 2 \leq d_1 + d_2 + ... + d_n$.

Наметим доказательство необходимости. Обозначим через e количество ребер в графе. Необходимость условий (1) и (3) известна, поскольку $d_1 + d_2 + ... + d_n = 2e$. Условие (2) необходимо, поскольку в графе нет петель, а значит степень каждой вершины не больше суммы степеней остальных вершин.

Теорема 1. *Граф без петель (но, возможно, с кратными ребрами и, возможно, не связный) с n вершинами степеней $d_1, d_2, ..., d_n \geq 0$ существует тогда и только тогда, когда выполнены условия (1) и (2) основной теоремы.*

Доказательство. Необходимость доказывается аналогично необходимости в основной теореме.

Докажем достаточность индукцией по $d_1+d_2+...+d_n$. База индукции: утверждение для $d_1 + d_2 + ... + d_n = 0$ очевидно. Докажем шаг индукции. Пусть утверждение для $d_1+d_2+...+d_n < k$. Докажем, что оно верно и для $d_1+d_2+...+d_n = k \geq 1$. Из $k \geq 1$ и условия (2) следует, что найдутся хотя бы две вершины ненулевой степени. Можно считать, что $d_1 \geq d_2 \geq ... \geq d_n$. Рассмотрим набор $d_1 - 1, d_2 - 1, d_3, ..., d_n$. Условия (1) и (2) для него выполнены, поскольку сумма степеней вершин уменьшилась на 2, а степень каждой вершины понизилась не более, чем на 1. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции: существует граф для набора $d_1-1, d_2-1, d_3, ..., d_n$. В этом графе соединим ребром вершины 1 и 2. Поскольку эти вершины различны, то петель не появилось. Следовательно, новый граф не содержит петель. Ясно, что набор степеней его вершин — $d_1, d_2, d_3, ..., d_n$. QED

Доказательство достаточности в основной теореме. Рассмотрим граф, полученный по теореме 1. Обозначим через c количество компонент связности этого графа.

Докажем, что если $c > 1$, то можно уменьшить количество компонент связности, не меняя степеней вершин. Ввиду условия (3) $e \geq n - 1 > n - c$. Поэтому хотя бы в одной компоненте связности есть цикл. Тогда можно взять ребро a_1a_2 этого цикла и ребро b_1b_2 из другой компоненты связности. Удалим эти ребра, и вместо них добавим ребра a_1b_1 и a_2b_2. Тогда степени вершин сохранятся, а количество компонент связности уменьшится на 1.

Такими операциями можно понизить количество компонент связности до 1. Получится связный граф без петель с заданными степенями вершин.