13-Я ПРОБЛЕМА ГИЛЬБЕРТА И БАЗИСНЫЕ ВЛОЖЕНИЯ

А. Скопенков

http://dfgm.math.msu.su/files/skopenkov/hilbert.pdf

В этом популярном обзоре, большая часть которого доступна старшекласснику, рассказывается о решении 13-й проблемы Гильберта и появившихся при этом понятии базисного подмножества и базисного вложения. (Ссылки даются по возможности не на оригинальные работы, а на обзоры.)

Две части обзора независимы друг от друга. В первой части приводится элементарное изложение идеи решения 13-й проблемы Гильберта о суперпозициях А. Н. Колмогоровым и В. И. Арнольдом (по мотивам [Ar58]). При этом показывается, как естественно появилось понятие базисного вложения. Приводится также решение проблемы Штернфельда о характеризации графов (и компактов), базисно вложимых в плоскость [St89, Sk95, KS97, KS98], а также ее обобщений [Ku00, Ku03, Ku03']. Вторая часть наиболее элементарна и посвящена решению проблемы Арнольда о характеризации базисных подмножеств плоскости [Ar58', St89, MKT03, Tr], а также обобщениям этой проблемы [Vo81, Vo82, SS06, RZ07]. Приводится (задача 8b) элементарное доказательство необходимости [MKT03].

Благодарю В.И. Арнольда, А.А. Барана, С.М. Воронина, В.А. Курлина и И.Н. Шнурникова за полезные обсуждения. Часть этого материала представлялась на Летних Конференциях Турнира Городов 1997 и 2006 годов.

О РЕШЕНИИ 13-Й ПРОБЛЕМЫ ГИЛЬБЕРТА

13-я проблема Гильберта.

Пусть дано некоторое множество функций $F = \{f_\alpha(x_1, \dots, x_{n_\alpha})\}_{\alpha\in A}$ (не обязательно конечное). Определим понятие *суперпозиции* функций из F (или *формулы* над F) индуктивно: [1]

(1) сами функции f_α и все переменные x_j являются суперпозициями функций из F.

(2) если функции $f(x_1, \dots, x_n)$, $g_1(\dots)$, $\dots$, $g_n(\dots)$ являются суперпозициями функций из F (не обязательно различными), то и функция $f(g_1(\dots), \dots, g_n(\dots))$ является суперпозицией функций из F.

Например, полином $\sum a_{k_1\dots k_n} x_1^{k_1}\cdots x_n^{k_n}$ есть суперпозиция функций $f(x, y) = x + y$ и $g(x, y) = xy$. Причем произведение можно исключить, так как $xy = \exp(\ln x + \ln y)$ для $x, y > 0$. (Аппроксимационная теорема Вейерштраса показывает, что функция нескольких аргументов может быть равномерно приближена на компактном множестве полиномами, а значит и суперпозициями функций одного аргумента и сложения.)

Рассмотрим следующие вопросы. [2]

1. Можно ли каждую функцию нескольких аргументов записать в виде суперпозиции функций не более чем двух аргументов?

2. Можно ли каждую функцию двух аргументов записать как суперпозицию функций одного аргумента и простейшей функции двух аргументов (например, сложения)?

Поскольку плоскость и прямая равномощны, то любую функцию трех и более переменных можно выразить в виде суперпозиции (вообще говоря, *разрывных*) функций двух переменных [Ar58]. Поэтому указанные вопросы интересны только для *непрерывных* функций. В дальнейшем все функции предполагаются непрерывными.

Ясно, что любая элементарная функция представляется ввиде суперпозиции функций двух переменных. Простейшие неэлементарные функции — корни алгебраических уравнений. К 1900 году было известно, что алгебраическое уравнения n-й степени сводится (при помощи радикалов) к такому, у которого коэффициэнты при x^n и x^0 равны 1, а при x^{n-1},

[1] Определение суперпозиции можно также сформулировать графически, на языке схем.

[2] Ясно, что для функций алгебры логики ответы на оба вопроса положительны. Элементарное изложение более глубокой теоремы Поста см. в [PSSZ] www.mcme.ru/circles/mat.htm.

x^{n-2} и x^{n-3} равны 0 (таким образом, остается $n-4$ переменных коэффициента). Кроме того, после доказательства Абелем и Галуа неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений степени выше 4, было доказано, что решение последнего уравнения выражается через тэта-функцию $n-4$ аргументов. Таким образом, 'простейшая' функция, выражение которой через функции меньшего числа переменных не было известно — функция $x(a,b,c)$, выражающую решение уравнения $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ седьмой степени. Поэтому Гильберт сформулировал свою 13-ю проблему так:

Доказать, что уравнение седьмой степени $x^7+ax^3+bx^2+cx+1=0$ неразрешимо в терминах функций не более чем двух аргументов.

Гильберту удалось показать, что некоторые *аналитические* функции трех переменных не являются суперпозициями аналитических же функций двух переменных. В 1954 Витушкин доказал, что некоторые *r раз непрерывно дифференцируемые* функции не являются суперпозициями r раз непрерывно дифференцируемых функций двух переменных [Ar58, Vi04]. Для непрерывных же функций гипотеза Гильберта была опровергнута в 1957 году Колмогоровым и Арнольдом.

Теорема Колмогорова-Арнольда. *Любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции непрерывных функций одного и двух аргументов.*

Приведем набросок доказательства этой теоремы. Обозначим $I=[-1,1]$.

Теорема Колмогорова: к суперпозициям функций трех переменных.

Весной 1956 г. Колмогорову удалось доказать, что *произвольная непрерывная функция более чем трех переменных является суперпозицией непрерывных функций трех переменных.* Он использовал следующее понятие. (Если это понятие покажется Вам сложным, Вы можете сразу перейти к лемме Колмогорова о функциях ниже).

Деревом T_f компонент множеств уровня функции $f:I\to I$ называется метрическое пространство, точками которого являются компоненты связности множеств $f^{-1}(c)$, $c\in I$, а расстояние между компонентами A и B множеств $f^{-1}(c)$ и $f^{-1}(d)$ задается формулой $\rho(A,B)=\min\{|x-y|\mid x\in A,\ y\in B\}$.

Например, дерево компонент множеств уровня функции $f:I^2\to I$, $f(x,y)=xy$, гомеоморфно букве X. См. другие примеры в [Ar58].

Очевидно, что любая функция $f:I^n\to I$ от n переменных представляется в виде композиции $(I^n)-t_f\to(T_f)-\overline{f}\to(I)$ для некоторых отображений $\overline{f}$ и t_f. Пространство T_f можно считать лежащим без самопересечений в квадрате I^2. [3] Поэтому t_f можно считать парой функций $u_f,v_f:I^n\to I$. Функцию $\overline{f}$ можно продолжить на весь квадрат I^2, т.е. считать функцией двух переменных. Итак, имеем *разложение Кронрода*

$$f(x_1,\dots,x_n)=\overline{f}(u_f(x_1,\dots,x_n),v_f(x_1,\dots,x_n)).$$

Лемма Колмогорова о деревьях. *Существуют такие деревья $T_1,\dots,T_{n+1}$ и функции $t_i:I^n\to T_i$, что для любой непрерывной функции $f:I^n\to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $g_1,\dots,g_{n+1}:I^n\to I$ от n переменных, для которых*

$$T_{g_i}=T_i,\quad t_{g_i}=t_i\quad\text{и}\quad f=g_1+\ldots+g_{n+1}.$$

Важно, что деревья T_{g_i} компонент множеств уровня функций g_i (и соответствующие отображения t_{g_i}) не зависят от f, хотя сами функции g_i могут зависеть от f. Заметим, что в приведенной формулировке лемма Колмогорова о деревьях нетривиальна даже для $n=1$ и $n=2$.

Из леммы Колмогорова о деревьях (которую мы не доказываем) и разложения Кронрода вытекает следующий результат (докажите!).

---

[3] Для доказательства нужно показать, что T_f является *деревом*, т. е. одномерным стягиваемым локально связным компактом. Примеры деревьев — пространства B и H_i на рис. 3. Любое дерево планарно [Ku68].

Лемма Колмогорова о функциях. *Для каждого n существует такой набор из $2n+2$ непрерывных функции $u_i, v_i : I^n \to I$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ от n переменных, что для любой непрерывной функции $f : I^n \to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $f_i : I^2 \to I$ $(i = 1, \ldots, n+1)$ двух переменных, для которых*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n+1} f_i(u_i(x_1, \ldots, x_n), v_i(x_1, \ldots, x_n)).$$

Важно, что функции u_i, v_i не зависят от f (при фиксированном n), хотя функции f_i могут зависеть от f.

Для $n = 1$ и $n = 2$ лемма Колмогорова о функциях (в приведенной формулировке) тривиальна (подумайте, почему). Доказательства мы не приводим. Хотя оно являются важным шагом в доказательстве теоремы Колмогорова-Арнольда, но наша цель — осветить именно те шаги, в которых появилось понятие базисного вложения.

Доказательство теоремы Колмогорова о выразимости через функции трех переменных. Для функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ четырех переменных имеем

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = f_{x_4}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^{4} f_{i,x_4}(u_i(x_1, x_2, x_3), v_i(x_1, x_2, x_3)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{4} F_i(u_i(x_1, x_2, x_3), v_i(x_1, x_2, x_3), x_4), \quad \text{где} \quad F_i(a, b, c) = f_{i,c}(a, b).$$

Для функции большего количества переменных рассуждение аналогично. QED

А. За одну копейку автомат выдает значение заданной Вами непрерывной функции трех переменных на заданной Вами тройке чисел. За какую сумму Вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию n переменных (при условии наличия у Вас неограниченной памяти)?

Теорема Арнольда: к суперпозициям функций двух переменных.

Для доказательства теоремы Колмогорова-Арнольда осталось произвольную непрерывную функцию трех переменных выразить через суперпозицию непрерывных функций двух переменных. Для этого полезно следующее понятие.

Подмножество $T \subset I^3$ назовем *базисным*, если любая непрерывная функция на T может быть разложена в сумму трех функций, каждая из которых зависит только от одной координаты. Или, формально, если для любой непрерывной функции $f : T \to I$ существуют такие непрерывные функции $f_1, f_2, f_3 : I \to I$, что

$$f(x, y, z) = f_1(x) + f_2(y) + f_3(z) \quad \text{для} \quad (x, y, z) \in T.$$

Лемма Арнольда о деревьях. *Любое дерево можно базисно вложить в I^3.*

Доказательство леммы Арнольда использует теорему Менгера о существовании универсального дерева. Идею доказательства проще всего увидеть на примере доказательства базисной вложимости в плоскость конечного дерева, из каждой вершины которого выходит либо одно, либо три ребра — см. построение базисных вложений в последнем пункте или [Ar58].

На самом деле, Арнольд доказал эту лемму для деревьев с точками ветвления третьего порядка. Этого было достаточно для решения проблемы Гильберта. Общий случай леммы доказан Острандом в 1965 [St89].

Лемма Арнольда о функциях. *Существует такой набор из 9 непрерывных функции $u_{ij} : I^2 \to I$ $(i, j = 1, 2, 3)$ двух переменных, что для любой непрерывной функции $f : I^2 \to I$*

двух переменных существуют непрерывные функции $f_{ij} : I \to I$ $(i, j = 1, 2, 3)$ одной переменной, для которых

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} f_{ij}(u_{ij}(x, y)).$$

Важно, что функции u_{ij} не зависят от f, хотя функции f_{ij} могут зависеть от f.

Доказательство. Возьмем 'универсальные' деревья T_1, T_2, T_3 из леммы Колмогорова о деревьях для $n = 2$. По лемме Арнольда о деревьях существуют базисные вложения $(u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}) : T_i \to I^3$. Возьмем функции f_i из теоремы Колмогорова о деревьях для $n = 2$. Лемма Арнольда о функциях вытекает из равенств

$$f_i(x, y) = \overline{f_i}(u_{i1}(x, y), u_{i2}(x, y), u_{i3}(x, y)) = f_{i1}(u_{i1}(x, y)) + f_{i2}(u_{i2}(x, y)) + f_{i3}(u_{i3}(x, y)). \quad QED$$

Теперь теорема Колмогорова-Арнольда вытекает из

$$f(x, y, z) = f_z(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} f_{ij,z}(u_{ij}(x, y)) = \sum_{i,j=1}^{3} F_{ij}(u_{ij}(x, y), z), \quad \text{где} \quad F_{ij}(t, z) = f_{ij,z}(t).$$

B. За одну копейку автомат выдает значение заданной Вами непрерывной функции двух переменных на заданной Вами паре чисел. За какую сумму Вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию n переменных (при условии наличия у Вас неограниченной памяти)?

Теорема Колмогорова: к функциям одной переменной и сложению.

В том же 1957 году Колмогоров доказал еще более сильный результат, из которого также вытекает решение проблемы Гильберта.

Суперпозиционная теорема Колмогорова. *Любая непрерывная функция представляется в виде суперпозиции сложения и непрерывных функций одной переменной.*

Более точно, для каждого $n > 1$ существует набор $(2n+1)n$ таких непрерывных функций $u_{ij} : I \to I$ $(i = 1, \dots, 2n+1,\ j = 1, \dots, n)$ одной переменной, что для любой непрерывной функции $f : I^n \to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $f_1, \dots, f_{2n+1} : I \to I$ одной переменной, для которых

$$f(x_1, \dots, x_n) \ = \ \sum_{i=1}^{2n+1} f_i \left(\sum_{j=1}^{n} u_{ij}(x_j) \right).$$

Здесь важно, что функции u_{ij} не зависят от f, хотя функции f_{ij} могут зависеть от f. Элементарное изложение доказательства суперпозиционной теоремы Колмогорова находится в [Ar58].

C.** За одну копейку автомат либо складывает два заданных Вами числа, либо выдает значение заданной Вами непрерывной функции одной переменной в заданной Вами точке. За какую сумму Вы заведомо сможете вычислить заданную непрерывную функцию n переменных (при условии наличия у Вас неограниченной памяти)?

Об аналитических проблемах, связанных с этим выдающимся результатом Колмогорова, см. [St89, Vi04]. Топологические проблемы рассмотрены далее.

Базисные вложения в многомерные пространства.

Подмножество $K \subset \mathbf{R}^n$ назовем *базисным*, если для любой непрерывной функции $f : K \to \mathbf{R}$ существуют такие непрерывные функции $f_1, \dots, f_n : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) + \ldots + f_n(x_n) \quad \text{для} \quad (x_1, \dots, x_n) \in K.$$

Пространство K называется *базисно вложимым* в $\mathbf{R}^n$, если существует вложение $K \to \mathbf{R}^n$, образ которого базисный.

Функции на произвольном n-мерном компакте уже нельзя представлять себе как функции n переменных. Однако понятие базисной вложимости доставляет аналог разложимости функций на компактах в суперпозицию фиксированных функций и сложения.

Из суперпозиционной теоремы Колмогорова следует, что *n-мерный куб базисно вложим в* $\mathbf{R}^{2n+1}$. Действительно, функции $u_i = \sum\limits_{j=1}^{n} u_{ij}$ $(i = 1, \dots, 2n+1)$ из теоремы Колмогорова определяют базисное вложение $I^n \to I^{2n+1}$, поскольку для любой непрерывной функции $f : I^n \to I$ от n переменных существуют непрерывные функции $f_1, \dots, f_{2n+1} : I \to I$ одной переменной, для которых

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(u_1(x_1, \dots x_n)) + \dots + f_{2n+1}(u_{2n+1}(x_1, \dots, x_n)). \qquad (*)$$

Остранд заметил в 1965, что этот факт можно обобщить.

Теорема Остранда. *Любой n-мерный компакт базисно вложим в* $\mathbf{R}^{2n+1}$ [St89].

На самом деле Остранд доказал следующий более сильный результат, обобщающий суперпозиционную теорему Колмогорова (а не только ее следствие).

Пусть $X_1, \dots, X_m$ — конечномерные метрические пространства. Положим $n = \dim X_1 + \dots + \dim X_m$ и $X = X_1 \times \dots \times X_m$. Тогда существуют такие непрерывные функции $u_{ij} : X_j \to \mathbf{R}$, $(i = 1, \dots, 2n+1,\ j = 1, \dots, m)$, что для функций $u_i(x_1, \dots, x_m) = u_{i1}(x_1) + \dots + u_{im}(x_m)$ и любой непрерывной функции $f : X \to \mathbf{R}$ существуют непрерывные функции $f_1, \dots, f_{2n+1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для которых выполнено (*).

Теорема Штернфельда. *Для любого $n \geq 2$* любой *n-мерный компакт не вложим базисно в* $\mathbf{R}^{2n}$ [St89].

Теорема Остранда является усилением теоремы Неблинга–Менгера–Понтрягина о вложимости любого n-мерного компакта в $\mathbf{R}^{2n+1}$ [Ku68]. Теорема Штернфельда является аналогом примера n-мерных полиэдров, не вложимых в $\mathbf{R}^{2n}$ [Pr04, Sk].

Очевидно, что K базисно вложим в $\mathbf{R}$ тогда и только тогда, когда K топологически вложим в $\mathbf{R}$. Из теорем Остранда и Штернфельда следует, что для $m > 2$ компакт K базисно вложим в $\mathbf{R}^m$ тогда и только тогда, когда $\dim K < m/2$. Таким образом, оставалось неизвестным лишь описание компактов, базисно вложимых *в плоскость*.

Базисная вложимость в плоскость.

Пространство K называется *базисно вложимым* в плоскость, если существует вложение $K \to \mathbf{R}^2$, образ которого базисный.

Проблема описания графов (и компактов), базисно *вложимых* в плоскость, поставлена Штернфельдом [St89]. Критерий базисной вложимости линейно-связных компактов в плоскость получен в [Sk95]. Для конечных графов он формулируется особенно просто.

Критерий базисной вложимости графов. [Sk95, ср. Sk05] *Конечный граф K базисно вложим в $\mathbf{R}^2$ тогда и только тогда, когда выполнено одно из следующих двух эквивалентных условий:*

(S) K не содержит подграфов, гомеоморфных окружности S^1, пентоду T_5 или кресту с разветвленными концами C (рис. 1);

(U) K содержится в одном из графов R_n (рис. 2).

Определим графы R_n (рис. 2). Пусть $U_1 = T_3$, A — висячее ребро графа U_1, a — висячая вершина ребра A. Граф U_{n+1} получается из U_n разветвлением каждого висячего ребра, кроме A. Пусть V_n — граф, полученный приклеиванием одного нового висячего ребра к каждой не висячей вершине графа U_n. Вершина a называется *корнем* графа V_n. Пусть R_n — букет трех копий V_n и дуги, такой, что корни графов V_n приклеиваются к одной из вершин дуги.

Доказательство намечено в конце следующего параграфа.

Декартовым произведением $X\times Y$ двух множеств X и Y называется множество всех пар (a,b) таких, что $a\in X$ и $b\in Y$.

Определение базисного вложения может быть очевидно обобщено на вложения в произвольное декартово произведение $X\times Y$. Если X и Y графы, то мы можем представлять себе произведение $X\times Y$ как двумерный объект (в некоторых случаях можно считать, что этот объект расположен в трехмерном пространстве). Например, $T\times I$ является 'книжкой с тремя страницами', $S^1\times I$ — цилиндром и $S^1\times S^1$ — тором. Теорема 1.a была обобщена на случай базисных вложений в декартовы произведения некоторых графов в [Ku00].

Назовем вершину конечного графа *ужасной*, если ее степень больше четырех. Назовем вершину конечного графа *страшной*, если ее степень равна четырем, и она не является концом ни одного висячего ребра. *Дефектом* графа K называется сумма $\delta(K)=(degA_1-2)+\ldots+(degA_k-2)$, где $A_1,\ldots,A_k$ — все страшные и ужасные вершины графа K.

Критерий базисной вложимости графов в книжку с n страницами. *Конечное дерево K является базисно вложимым в $\mathbf{R}\times T_n$ тогда и только тогда, когда либо $\delta(K)<n$, либо $\delta(K)=n$ и K содержит ужасную вершину, имеющую висячее ребро* [Ku00].

Следующая гипотеза навеяна теоремой Робертсона-Симора о вложимости графов в поверхности [Sk05].

Гипотеза. *(a) Существует лишь конечное число 'запрещенных' подграфов для базисной вложимости конечного графа в данное произведение графов.*

(b) Существует алгоритм проверки базисной вложимости конечного графа в данное произведение графов.

Критерий базисной вложимости линейно-связных компактов. [Sk95, ср. Sk05] *Линейно-связный компакт K базисно вложим в плоскость тогда и только тогда, когда он является локально связным (т.е. пеановским) и выполнено любое из двух следующих (эквивалентных) условий:*

(1) K не содержит подкомпактов S,C_2,C_4,B и, для некоторого n, подкомпактов F_n и H_n (рис. 1, 3);

(2) K не содержит подконтинуумов $S,C_1,C_2,C_3,B,F,H_+,\ H_-,h_+,h_-$ (рис. 2, 3).

Введем использованные обозначения и определения (рис. 1, 2, 3).

Нуль-последовательностью множеств называется последовательность множеств, диаметры которых стремятся к нулю.

C_3 — крест с нуль-последовательностью дуг, сходящихся к его центру и приклеенных к одной из его ветвей.

C_4 — крест с последовательностью точек, сходящихся к его центру.

B — объединение отрезка $[0,1]$ и нуль-последовательности дуг, приклеенных за один конец к $(0,1)$. Очевидно, что топологический тип пространства B не зависит от вариаций в его построении.

F_1 — триод, и F_{n+1} получено из F_n разветвлением каждого конца графа F_n.

H_n – объединение отрезка $[0,1]$ с нуль-последовательностью триодов, приклеенных к I за один конец в точках множества $D_n=\{3^{-l_1}+\ldots+3^{-l_s}\mid s\le n,\ 0<l_1<\ldots<l_s \text{ – целые}\}$.

F – объединение отрезка $[0,1]$ с нуль-последовательностью графов F_n, приклеенных к точкам $1/n$ за один конец.

H_+ и H_- — объединения отрезка $[0,1]$ с нуль-последовательностью континуумов H_n, соединенные с точками $1/n$ дугами, пересекающими H_n в $1\in[0,1]\subset H_n$ и $0\in[0,1]\subset H_{n-1}$, соответственно.

h_+ (соответственно h_-) получено из нуль-последовательности континуумов H_n склеиванием точек $1\in[0,1]\subset H_n$ и $0\in[0,1]\subset H_{n-1}$ (соответственно $0\in[0,1]\subset H_n$ и $1\in[0,1]\subset H_{n-1}$).

Гипотезу о вложимости (не обязательно линейно-связных) континуумов в плоскость см. в [Sk95].

БАЗИСНОСТЬ ПЛОСКИХ МНОЖЕСТВ

Если условие задачи является утверждением, то задача состоит в том, чтобы это утверждение доказать. Трудные задачи отмечены звездочкой, а нерешенные — двумя.

Разрывная базисность.

1. (a) Для любых ли четырех чисел $f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}$ существуют такие четыре числа g_1, g_2, h_1, h_2, что $f_{ij} = g_i + h_j$ при любых $i, j = 1, 2$?

(b) Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в игру 'А ну-ка, разложи!'. На шахматной доске отмечено несколько клеток. А. Н. расставляет числа в отмеченных клетках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет 16 чисел $a_1, \ldots, a_8, b_1, \ldots, b_8$, т.е. 'весов' столбцов и строк, как хочет. Если число в каждой отмеченной клетке оказалось равным сумме весов строки и столбца этой клетки, то выигал В. И., а иначе (т.е. если число хотя бы в одной отмеченной клетке оказалось не равным сумме весов строки и столбца этой клетки) выиграл А. Н.

Докажите, что при правильной игре В. И. выигрывает тогда и только тогда, когда не существует замкнутого маршрута ладьи, начальная клетка и клетки поворота которого являются отмеченными (не обязательно все отмеченные клетки задействованы).

Обозначим через $\mathbf{R}^2$ плоскость с фиксированной системой координат. Обозначим через $x(a)$ и $y(a)$ координаты точки $a \in \mathbf{R}^2$. Последовательность (конечная или бесконечная) точек плоскости $\{a_1, \ldots, a_n, \ldots\} \subset \mathbf{R}^2$ называется *молнией*, если для каждого i выполнено $a_i \neq a_{i+1}$, и при этом $x(a_i) = x(a_{i+1})$ для четных i и $y(a_i) = y(a_{i+1})$ для нечетных i. Не обязательно все точки молнии различны. Конечная молния $\{a_1, \ldots, a_{2l+1}\}$ называется *замкнутой*, если $a_1 = a_{2l+1}$.

2. (a) Рассмотрим замкнутую молнию $\{a_1, \ldots, a_n = a_1\}$. Назовем *разложением* расстановку чисел в проекциях точек этой молнии на ось Ox и в проекциях точек этой молнии на ось Oy. Можно ли так расставить в точках молнии числа $f_1, \ldots, f_n \in \mathbf{R}$ с $f_1 = f_n$, чтобы для любого разложения некоторое число f_i не было бы равно сумме двух чисел, стоящих в $x(a_i)$ и в $y(a_i)$?

(b) Представьте функцию $f : [(-1,-1),(1,1)] \cup [(0,0),(1,-1)] \to \mathbf{R}$, $f(x,y) = xy$ в виде суммы $g(x) + h(y)$ двух функций, каждая из которых зависит только от одной координаты.

Подмножество $K \subset \mathbf{R}^2$ плоскости называется *разрывно базисным*, если для любой функции $f : K \to \mathbf{R}$ существуют такие функции $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x,y) \in K$.

3. (a) Отрезок $K = 0 \times [0,1] \subset \mathbf{R}^2$ является разрывно базисным.

(b) Крест $K = 0 \times [-1,1] \cup [-1,1] \times 0 \subset \mathbf{R}^2$ является разрывно базисным.

(c) Докажите следующий результат.

Критерий разрывной базисности. *Подмножество плоскости разрывно базисно тогда и только тогда, когда оно не содержит замкнутых молний.*

4.** (a) Андрей Николаевич и Владимир Игоревич играют в 3D-игру 'А ну-ка, разложи!'. В кубе $n \times n \times n$, разбитом на n^3 единичных кубиков, отмечено несколько кубиков. А. Н. расставляет числа в отмеченных кубиках, как хочет. В. И. смотрит на расставленные числа и берет $3n$ чисел $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_n$ — 'весов' колонок, продольных строк и поперечных строк (т.е. рядов, параллельных оси z, оси x и оси y) — как хочет. Если число в каждом отмеченном кубике (i,j,k) (поставленное А. Н.) оказалось равным сумме $a_i + b_j + c_k$ трех весов колонки, продольной строки и поперечной строки этого кубика, то выиграл В. И., а иначе (т.е. если число хотя бы в одном отмеченном кубике оказалось не равным сумме трех весов) выиграл А. Н.

Как по набору отмеченных кубиков узнать, кто выигрывает?

(Ясно, что *алгоритм* распознавания выигрышности данного набора отмеченных кубиков существует. Желательно найти простой критерий типа того, который имеется для плоского аналога этой игры. Интересны даже ответы для маленьких n.)

(b) Определите разрывную базисность подмножеств трехмерного пространства. Сформулируйте и докажите пространственный аналог приведенного критерия.

(c) То же для многомерного случая.

Решения задач.

1. (a) Это неверно. Если $f_{ij} = g_i + h_j$ для $i, j = 1, 2$, то $f_{11} + f_{22} = f_{12} + f_{21}$, но это соотношение не имеет места для некоторых наборов чисел f_{ij}.

(b) "Только тогда" следует из задачи 2. Докажем утверждение "тогда" индукцией по количеству отмеченных клеток. Если отмечена только одна клетка, утверждение задачи тривиально. Обозначим за K множество центров отмеченных клеток. По условию, K не содержит замкнутых молний, следовательно $\#E(K) < \#K$. Значит, по индуктивному предположению В.И. может выиграть на множестве $E(K)$. Все оставшиеся клетки являются единственными отмеченными в своей строке или в своем столбце. Следовательно, В.И. сможет выбрать и оставшиеся веса для K.

2. Да. Если каждое из чисел f_i представимо в виде суммы двух чисел, расположенных в точках $x(a_i)$ и $y(a_i)$, то $f_1 - f_2 + f_3 - \ldots - f_{n-1} = 0$, но можно легко подобрать набор чисел f_i, для которого это неверно.

3. (a) Положим $h(y) = f(0, y)$ и $g(x) = 0$.

(b) Положим $g(x) = f(x, 0)$ и $h(y) = f(0, y) - f(0, 0)$.

(c) "Только тогда" следует из задачи 2. Докажем утверждение "тогда". Рассмотрим произвольную функцию $f : K \to \mathbf{R}$ и построим по ней функции g и h такие, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$. Назовём две точки $a, b \in K$ *эквивалентными*, если существует молния $\{a = a_1, \ldots, a_n = b\} \subset K$. Возьмём один из классов эквивалентности $K_1 \subset K$ и определим функции $g : x(K_1) \to \mathbf{R}$ и $h : y(K_1) \to \mathbf{R}$ следующим образом. Зафиксируем произвольную точку $a_1 \in K_1$. Положим $g(x(a_1)) = f(a_1)$ и $h(y(a_1)) = 0$. Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2l}\}$ — молния из точек множества K, то положим

$$h(y(a_{2l})) := f(a_{2l}) - f(a_{2l-1}) + \ldots - f(a_1) \quad \text{и} \quad g(x(a_{2l})) = f(a_{2l-1}) - f(a_{2l-2}) + \ldots + f(a_1).$$

Если $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2l+1}\}$ — молния из точек множества K, то положим

$$g(x(a_{2l+1})) = f(a_{2l+1}) - f(a_{2l}) + \ldots + f(a_1)$$

(значение $h(y(a_{2l+1}))$ уже определено). Сделаем это построение для всех классов эквивалентности одновременно. Для всех же прочих точек положим $g(x) = 0$ и $h(y) = 0$.

Непрерывная базисность.

Через $|z, z_0| = |(x, y),\ (x_0, y_0)| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ обозначается обычное расстояние между точками $z = (x, y)$ и $z_0 = (x_0, y_0)$ плоскости. Пусть K — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$. Функция $f : K \to \mathbf{R}$ называется *непрерывной*, если для любых точки $z_0 \in K$ и числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $z \in K$ с условием $|z, z_0| < \delta$ выполнено $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$. Иногда удобно обозначать точки (x, y) вместо z.

5. (a) Функция $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ является непрерывной на плоскости.

(b) Функция $f(x, y)$, равная целой части от $x + y$, не является непрерывной на плоскости.

(c) Если $a_1, \ldots, a_n$ — различные точки множества $K \subset \mathbf{R}^2$, то существует непрерывная функция $f : K \to \mathbf{R}$, для которой $f(a_i) = (-1)^i$ и $|f(x)| \le 1$ для любого $x \in K$.

(d) Пусть $K = \{a_1, \ldots, a_{4n+4}\}$ — молния из $4n + 4$ различных точек на плоскости и $f_1, \ldots, f_{4n+4}$ — числа, для которых $|(-1)^i - f_i| < 1/2n$. Пусть $g(x(a_i)), h(y(a_i))$, $i = 1, \ldots, 4n+4$, — такие числа, что $f_i = g(x(a_i)) + h(y(a_i))$ для любого i (при этом если $x(a_i) = x(a_j)$, то $g(x(a_i)) = g(x(a_j))$, и аналогично для y и h). Докажите, что $\max_i |g(x(a_i))| > n$.

Все встречающиеся в дальнейшем функции предполагаются непрерывными.

Подмножество $K \subset \mathbf{R}^2$ называется *(непрерывно) базисным*, если для любой непрерывной функции $f : K \to \mathbf{R}$ существуют такие непрерывные функции $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для каждой точки $(x, y) \in K$.

6. (a) Замкнутая молния не базисна.

(b) Отрезок $K = 0 \times [0, 1] \subset \mathbf{R}^2$ является базисным.

(c) Крест $K = 0 \times [-1, 1] \cup [-1, 1] \times 0 \subset \mathbf{R}^2$ является базисным.

7. (a) Если подмножество плоскости базисно, то оно разрывно базисно.

(b) *Пополненной молнией* называется объединение точки $a_0 \in \mathbf{R}^2$ с бесконечной молнией $\{a_1, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbf{R}^2$ из различных точек, *сходящейся* к точке a_0 (т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное N, что для любого $i > N$ выполнено $|a_i, a_0| < \varepsilon$). Докажите, что никакая пополненная молния не является базисной. (Заметим, что она является разрывно базисной).

(c) Через $[a, b]$ обозначим отрезок, соединяющий точки a и b. Докажите, что крест $[(-1, -2), (1, 2)] \cup [(-1, 1), (1, -1)]$ не является базисным.

(d) Пусть $m_{i,j} = 2 - 3 \cdot 2^{-i} + j \cdot 2^{-2i}$. Рассмотрим множество, состоящее из точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l})$ и точек $(m_{i,2l}, m_{i,2l-2})$, где i от 1 до ∞ и $l = 1, 2, 3, \dots, 2^{i-1}$. Докажите, что это подмножество плоскости не содержит бесконечной молнии, но содержит сколь угодно длинные молнии.

(e) Объединение множества из предыдущего пункта с точкой $(2, 2)$ не базисно.

8. Пусть $K \subset \mathbf{R}^2$ — образ отрезка $[0, 1]$ при непрерывном отображении $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$.

(a) Любая непрерывная функция $K \to \mathbf{R}$ достигает своего наибольшего и наименьшего значений. Указание: сведите к аналогичной теореме для непрерывных функций $[0, 1] \to \mathbf{R}$.

(b)* Если K содержит сколь угодно длинные молнии, то K не базисно.

Последовательность точек a_i плоскости называется *сходящейся к точке* a, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое целое N, что для любого $i > N$ выполнено $|a, a_i| < \varepsilon$.

Подмножество $K \subset \mathbf{R}^2$ плоскости называется *замкнутым*, если для любой бесконечной последовательности точек $a_i \in K$, сходящейся к точке a, выполнено $a \in K$.

9. (a) Подмножество $K \subset \mathbf{R}^2$ плоскости является замкнутым тогда и только тогда, когда для любой точки $a \notin K$ найдется такое $\varepsilon > 0$, что любая точка плоскости с расстоянием менее ε до a не принадлежит K.

(b) Образ отрезка при непрерывном отображении $[0, 1] \to \mathbf{R}^2$ в плоскость является замкнутым подмножеством плоскости.

Критерий непрерывной базисности. *Замкнутое ограниченное подмножество плоскости непрерывно базисно тогда и только тогда, когда оно не содержит сколь угодно длинных молний* [St89].

10. (a) Условие замкнутости в критерии действительно необходимо.

(b) Условие ограниченности в критерии действительно необходимо.

(c) Докажите часть 'только тогда' ($\Rightarrow$) критерия.

Пусть K — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$. Для каждой точки $v \in K$ нарисуем две прямые, проходящие через v параллельно координатным осям. Если хотя бы одна из этих двух прямых пересекает K только в точке v, то покрасим v в белый цвет. Обозначим через $E(K)$ множество всех точек K, не являющихся белыми:

$$E(K) = \{v \in K : \ |K \cap (x = x(v))| \geq 2 \text{ и } |K \cap (y = y(v))| \geq 2\}.$$

Пусть $E^2(K) = E(E(K))$, $E^3(K) = E(E(E(K)))$ и т.д.

11. (a) Если $K \subset \mathbf{R}^2$ не содержит сколь угодно длинных молний, то $E^n(K) = \emptyset$ для некоторого n.

(b) Докажите обратное.

(c)* Докажите часть 'тогда' ($\Leftarrow$) критерия непрерывной базисности.

(d)** Докажите элементарно (т.е. без использования описания пространства $C^*(K)$ в терминах мер), что если $K \subset \mathbf{R}^2$ замкнуто и ограничено, причем $E(K) = \emptyset$, то K базисно [Tr]. Указание. Получите сначала разложение $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для *кусочно-линейных* функций f, причем $|g| + |h| < 5|f|$.

(e)** Докажите элементарно (т.е. без использования описания пространства $C^*(K)$ в терминах мер) часть 'тогда' критерия непрерывной базисности. Указание. То же, $|g|+|h| < C_n|f|$, где C_n зависит только от того n, для которого $E^n(K) = \emptyset$.

(f)** Найдите критерий непрерывной базисности для замкнутых (но неограниченных) подмножеств плоскости.

12. (a) Определите (непрерывную) базисность подмножеств трехмерного пространства. Докажите, что еж $0 \times 0 \times [-1,1] \cup 0 \times [-1,1] \times 0 \cup [-1,1] \times 0 \times 0 \subset \mathbf{R}^3$ является базисным.

(b) Подмножество пространства $\mathbf{R}^3$, состоящее из четырех точек $(0,0,0)$; $(1,1,0)$; $(0,1,1)$; $(1,0,1)$, не базисно. (Но $E^n(K) \neq \emptyset$ для любого n, см. ниже.)

(c)* Пусть подмножество $K \subset \mathbf{R}^3$ пространства замкнуто и ограничено. Аналогично определим $E(K)$, используя вместо прямых плоскости, перпендикулярные осям координат:

$$E(K) = \{v \in K : \ |K \cap (x = x(v))| \geq 2, \ |K \cap (y = y(v))| \geq 2 \text{ и } |K \cap (z = z(v))| \geq 2\}.$$

Докажите, что если $E^n(K) = \emptyset$ для некоторого n, то K базисно.

(d)** Докажите элементарно (т.е. без использования описания пространства $C^*(K)$ в терминах мер) предыдущий результат.

Решения задач.

5. (a) Можно положить $\delta = \varepsilon$, тогда утверждение следует из неравенства треугольника $|f(z) - f(z_0)| \leq |z, z_0|$.

(b) Для $x = 1$, $y = 0$ и $\varepsilon = \frac{1}{2}$ такого δ не существует, т.к. $|f(1,0) - f(1 - \frac{\delta}{2}, 0)| = 1 > \frac{1}{2}$.

(c) Построим сначала непрерывную функцию $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, удовлетворяющую условию задачи. Обозначим $s = \min_{i<j} |a_i, a_j|$. Рассмотрим n дисков с центрами в точках a_i и радиусами $\frac{s}{3}$. Вне этих дисков положим $f = 0$. Внутри i-го диска сделаем f линейной функцией от радиуса, равной $(-1)^i$ в центре a_i и нулю на границе. Теперь ограничим построенную функцию на $K \subset \mathbf{R}^2$ и получим требуемую непрерывную функцию $K \to \mathbf{R}$.

(d) Имеем

$$|(f_2 - f_3 + f_4 - f_5 + \ldots - f_{4n+3}) - (4n+2)| \leq \frac{4n+2}{2n} \leq 3.$$

Это означает, что $g(a_2) - g(a_{4n+3}) \geq (4n+2) - 3 > 2n$, из чего немедленно следует требуемое неравенство.

6. (a) Если бы молния $A = \{a_1, \ldots, a_{2l+1}\}$ была базисной, то $f(a_1) - f(a_2) + \ldots + f(a_{n-2}) - f(a_{2l}) = 0$, но легко подобрать функцию f, для которой это не выполнено. Сравните с задачей 2.

(b),(c) Аналогично задчам 3a, 3b.

7. (a) Если множество не является разрывно базисным, то оно содержит замкнутую молнию. Тогда утверждение задач следует из 6a, т.к. функция f может быть продолжена с замкнутой молнии на всё множество.

(b) Рассмотрим функцию f, для которой $f(a_i) = \frac{(-1)^i}{i}$. Предположим, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для некоторых непрерывных g и h, тогда

$$f(a_1) - f(a_2) + f(a_3) - f(a_4) + \ldots - f(a_{2l}) = h(y(a_1)) - h(y(a_{2l})).$$

Так как $\lim_{l \to \infty} h(y_{2l})$ существует и равен $h(y(a_0))$, то ряд $\sum_{i=1}^{2l} (-1)^i f(a_i)$ сходится при $l \to \infty$. Но это противоречит расходимости гармонического ряда.

(c) Крест содержит замкнутую молнию

$$a_{4k+1} = (\frac{-1}{4^k}, \frac{1}{4^k}), \ a_{4k+2} = (\frac{1}{2 \cdot 4^k}, \frac{1}{4^k}), \ a_{4k+3} = (\frac{1}{2 \cdot 4^k}, \frac{-1}{2 \cdot 4^k}), \ a_{4k+4} = (\frac{-1}{4^{k+1}}, \frac{-1}{2 \cdot 4^k})$$

Определим функцию f на этой молнии, используя задачу 7(b), и продолжим её кусочно-линейно на весь крест. Не существует таких функций g и f, что $f(x,y) = g(x) + h(y)$.

(d) Для любого i точки $(x_{i,2l}, x_{i,2l})_{l=1}^{2^{i-1}}$ и $(x_{i,2l}, x_{i,2l-2})_{l=1}^{2^{i-1}}$ образуют молнию из 2^i элементов.

(e) Определим функцию $f(x,y)$ соотношениями

$$f((x_{i,2l}, x_{i,2l})) := \frac{1}{2^i} \quad \text{и} \quad f((x_{i,2l}, x_{i,2l-2})) := -\frac{1}{2^i}$$

Предположим, что $f(x,y) = g(x)+h(y)$ для некоторых непрерывных $g(x)$ и $h(y)$. Теперь для каждого i, используя молнии $(x_{i,2l}, x_{i,2l})$ и $(x_{i,2l}, x_{i,2l-2})$, где $l = 1, 2, 3, \dots 2^{i-1}$, получаем $h(2-\frac{3}{2^i})-h(2-\frac{2}{2^i}) = 1$. Это противоречит непрерывности h в точке $y = 2$.

Функция $f : K \to \mathbf{R}$ называется *ограниченной*, если найдется число M такое, что $|f(x,y)| < M$ для любой точки $(x,y) \in K$. Для функции $G : K \to \mathbf{R}$ положим $|G| := \max_{x\in K} |G(x)|$.

8. *Лемма.* Непрерывная функция $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ ограничена.

Доказательство. Предположим противное. Тогда для каждого целого n существует такая точка $a_n \in [0,1]$, что $|f(a_n)| > n$. Выберем из последовательности a_n подпоследовательность a_{n_i}, сходящуюся к некоторой точке $a \in [0,1]$. Из непрерывности функции f следует, что $|f(a_{n_i})|$ стремится к $|f(a)|$. Но в то же время эта последовательность стремится к бесконечности по построению! Из полученного противоречия следует лемма.

(a) Возьмём такое отображение $k : [0,1] \to \mathbf{R}^2$, что $K = k([0,1])$ и рассмотрим композицию $f \circ k : [0,1] \to \mathbf{R}$. Пусть s есть минимальное число, для которого $f(k(t)) \le s$ для всех $t \in [0,1]$. Если бы не существовало такого t, что $f(k(t)) = s$, то непрерывная функция $\frac{1}{s-f(k(t))} : [0,1] \to \mathbf{R}$ оказалась бы неограниченной. Но это невозможно по Лемме. Следовательно, f достигает своего наибольшего значения. Аналогично доказывается утверждение для наименьшего значения функции f.

(b) Предположим, что K содержит сколь угодно длинные молнии и базисно. Можно считать, что все точки каждой молнии различны. Тогда для любого n существует молния $\{a_1^n, \dots, a_{4n+4}^n\}$ из $(4n+4)$-х различных точек множества K. Существует непрерывная функция $f_n : K \to \mathbf{R}$ такая, что $f_n(a_i^n) = (-1)^i$ и $|f_n(x)| \le 1$ для любого $x \in K$. Пусть $f : K \to \mathbf{R}$ и $g, h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ — непрерывные функции, для которых $|f - f_n| < 1/2n$ и $f(x,y) = g(x) + h(y)$ для любой точки $(x,y) \in K$. Тогда $|g| > n$ по задаче 5(d).

Определим по индукции последовательность чисел s_n и функций $F_n : K \to \mathbf{R}$. Положим $s_0 = 1$ и $F_0 = 0$. Предположим, что s_{n-1} и F_{n-1} уже определены. Возьмем функции $G_{n-1}, H_{n-1} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, для которых $F_{n-1}(x,y) = G_{n-1}(x) + H_{n-1}(y)$ (если таких функций нет, то все доказано). Берем

$$s_n > s_{n-1}! \cdot (|G_{n-1}| + n) \quad \text{и} \quad F_n = F_{n-1} + \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!}$$

Тогда функция $F = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!}$ не представима в виде $G(x) + H(y)$ (что и остается доказать).

Предположим, что $F(x,y) = G(x) + H(y)$. Докажем, что $|G| > n$ для каждого n. Имеем:

$$F - F_n = F - F_{n-1} - \frac{f_{s_n}}{s_{n-1}!} = \frac{s_{n-1}!(F - F_{n-1}) - f_{s_n}}{s_{n-1}!}.$$

Положим $f = s_{n-1}!(F - F_{n-1})$. Тогда $s_n - 1 > s_{n-1}$ при $n > 2$ и

$$|f - f_{s_n}| = s_{n-1}!|F - F_n| < \frac{1}{(s_n - 1)\cdot s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{s_{n+1}\cdot \ldots \cdot s_{n+k}} < \frac{1}{(s_n - 1)\cdot s_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2s_n}.$$

Но в то же время

$$f = s_{n-1}!(G(x) - G_{n-1}(x)) + s_{n-1}!(H(y) - H_{n-1}(y)).$$

По задаче 5(d) получаем $s_{n-1}!|G - G_{n-1}| > s_n$. Следовательно,

$$|G| + |G_{n-1}| \ge |G - G_{n-1}| > \frac{s_n}{s_{n-1}!} > |G_{n-1}| + n.QED$$

9. (a) Докажем утверждение "только тогда". Пусть K — замкнутое подмножество плоскости. Предположим, что для некоторой точки $a=(x,y)\notin K$ и для произвольного $\varepsilon=\frac{1}{n}>0$ существует хотя бы одна точка $a_n\in K$, для которой $|a,a_n|\le\frac{1}{n}$. Но тогда последовательность точек $a_n\in K$ сходится к точке a, поэтому $a\in K$. Противоречие.

Теперь докажем утверждение "тогда". Пусть некоторая последовательность a_n сходится к точке a, не лежащей в множестве K. По условию существует $\varepsilon>0$ такое, что для любой точки $a_n\in K$ расстояние $|a,a_n|>\varepsilon$. Но это противоречит сходимости последовательности.

(b) Рассмотрим непрерывное отображение $f:[0,1]\to\mathbf{R}^2$. Предположим, что некоторая последовательность точек $\{a_i\}$ из образа f сходится к точке a. Для каждого i выберем $t_i\in f^{-1}(a_i)$. Теперь выделим из последовательности $\{t_i\}$ сходящуюся подпоследовательность $\{t_{i_k}\}$. Её предел обозначим за $t_0\in[0,1]$. Отображение f непрерывно, значит, последовательность $f(t_{i_k})$ сходится к $f(t_0)$. Тогда $a=f(t_0)$, следовательно, $f([0,1])$ замкнуто.

10. (a) Любая бесконечная молния A, не содержащая замкнутых молний и сходящаяся к точке $a\notin A$, является базисной. Это следует из того, что любая функция, определённая на A, непрерывна.

(b) Контрпримером является множество $\{(k,k)\}_{k=1}^{\infty}\cup\{(k,k-1)\}_{k=1}^{\infty}$ точек плоскости.

(c) Доказательство повторяет решение задачи 8(b), используя следующую Лемму.

Лемма. Пусть K — произвольное замкнутое ограниченное подмножество плоскости. Тогда любая непрерывная функция $f:K\to\mathbf{R}$ ограничена.

11. (a) Предположим, что $E^n(K)\ne\emptyset$ для всех n. Для каждого n рассмотрим точку $a_0\in E^n(K)$. Выберем точки $a_{-1},a_1\in E^{n-1}(K)$ такие, что $x(a_{-1})=x(a_0)$ и $y(a_1)=y(a_0)$. Теперь можно выбрать точки $a_{-2},a_2\in E^{n-2}(K)$, для которых $\{a_{-2},a_{-1},a_0,a_1,a_2\}$ — молния. Аналогично можно сконструировать молнию из $2n+1$ точек, лежащую целиком в множестве K. Что и требовалось доказать.

(b) Пусть теперь множество K содержит молнию из $2n+1$ точки $\{a_{-n},\dots,a_0,\dots,a_n\}$. Тогда в множестве $E(K)$ содержится молния из $2n-1$ точки $\{a_{-n+1},\dots,a_{n-1}\}$. Продолжая, получим, что $a_0\in E^n(K)$. Следовательно, если $E^n(K)=\emptyset$, то K не содержит молнии из $2n+1$ точек.

(c)* Приведём неэлементарное доказательство, основанное на переформулировке свойства базисности в терминах *ограниченных линейных операторов* в *банаховых пространствах функций*. Обозначим через $C(X)$ пространство непрерывных функций на X с нормой $|f|=\sup\{|f(x)|\ :\ x\in X\}$. Обозначим $I:=[0,1]$. Обозначим через $pr_x(a)$ и $pr_y(a)$ проекции точки $a\in K$ на оси координат.

Для подмножества $K\subset I^2$ определим отображение (*линейный оператор суперпозиции*)

$$\phi:C(I)\oplus C(I)\to C(K)\quad\text{формулой}\quad\phi(g,h)(x,y)=g(x)+h(y).$$

Ясно, что подмножество $K\subset I^2$ базисно тогда и только тогда, когда ϕ эпиморфно. Обозначим через $C^*(X)$ пространство ограниченных линейных функций $C(X)\to\mathbf{R}$ с нормой $|\mu|=\sup\{|\mu(f)|\ :\ f\in C(X),\ |f|=1\}$. Для подмножества $K\subset I^2$ определим отображение (*двойственный линейный оператор суперпозиции*)

$$\phi^*:C^*(K)\to C^*(I)\oplus C^*(I)\quad\text{как}\quad\phi^*\mu(g,h)=(\mu(g\circ pr_x),\mu(h\circ pr_y)).$$

Так как $|\phi^*\mu|\le2|\mu|$, то ϕ^* ограничен. По двойственности, ϕ эпиморфен тогда и только тогда, когда ϕ^* мономорфен.

(При этом ϕ^* может быть инъективным, но не мономорфным. Другими словами, не только линейные соотношения на $\operatorname{im}\phi$ заставляют его быть строго меньше чем $C(K)$, как показывает пример небазисной пополненной молнии.)

Понятно, что ϕ^* мономорфен тогда и только тогда, когда *существует $\varepsilon>0$ такое, что $|\phi^*\mu|>\varepsilon|\mu|$ для каждого ненулевого $\mu\in C^*(K)$.*

Остаётся доказать, что последнее условие следует из того, что $E^n(K)=\emptyset$. Приведем доказательство для $n\in\{1,2\}$ (для произвольного n оно аналогично). Мы используем следующий нетривиальный факт: $C^*(K)$ *совпадает с пространством σ-аддитивных регулярных вещественнозначных борелевских мер на K* (далее мы будем называть их просто 'мерами'; используется также термин 'заряды'). Имеем

$$\phi^*\mu=(\mu_x,\mu_y),\quad\text{где}\quad\mu_x(U)=\mu(pr_x^{-1}U)\quad\text{и}\quad\mu_y(U)=\mu(pr_y^{-1}U).$$

Если $\mu = \mu^+ - \mu^-$ есть разложение меры μ на положительные и отрицательные части, то $|\mu| = \bar{\mu}(X)$, где $\bar{\mu} = \mu^+ + \mu^-$ есть абсолютное значение меры μ.

Обозначим через D_x (и D_y) множество тех точек из K, которые не затеняются любой другой точкой из K в x- (и y-) направлении. Возьмем любую меру μ на K с нормой 1.

Если $n = 1$, то

$$E(K) = \emptyset, \quad \text{поэтому} \quad D_x \cup D_y = K, \quad \text{значит,} \quad 1 = \bar{\mu}(K) \le \bar{\mu}(D_x) + \bar{\mu}(D_y).$$

Тогда, не уменьшая общности, $\bar{\mu}(D_x) \ge 1/2$. Так как проекция на ось x инъективна на D_x, то $|\mu_x| \ge 1/2$. Из этого вытекает необходимое утверждение для $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Если $n = 2$, то

$$E(E(K)) = \emptyset, \quad \text{поэтому} \quad D_x \cup D_y = K - E(K) \quad \text{и} \quad E(D_x \cup D_y) = \emptyset.$$

Тогда при $\bar{\mu}(E(K)) < 3/4$ имеем $\bar{\mu}(D_x \cup D_y) > 1/4$ и, не уменьшая общности, $\bar{\mu}(D_x) > 1/8$, значит, как и в случае $n = 1$, имеем $|\mu_x| > 1/8$, из чего вытекает необходимое утверждение для $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

При $\bar{\mu}(E(K)) \ge 3/4$ имеем $\bar{\mu}(K - E(K)) \le 1/4$. Как и в случае $n = 1$, не уменьшая общности, $\bar{\mu}_x(pr_x(E(K))) \ge \bar{\mu}(E(K))/2$. Следовательно $|\mu_x| \ge \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$, из чего и вытекает необходимое утверждение для $\varepsilon = \frac{1}{8}$.

Заметим, что если $K \subset \mathbf{R}^2$ - базисное подмножество, то мы можем доказать без использования ϕ, что ϕ^* мономорфно. Определим линейный оператор $\Psi : C^*(I) \oplus C^*(I) \to C^*(K)$ формулой $\Psi(\mu_x, \mu_y)(f) = \mu_x(g) + \mu_y(h)$, где $g, h \in C(I)$ таковы, что $g(0) = 0$ и $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для $(x, y) \in K$. Ясно, что $\Psi\phi^* = \mathrm{id}$ и Ψ ограничено, следовательно ϕ^* мономорфно.

12. (a) Множество $K \subset \mathbf{R}^3$ называется *(непрерывно) базисным*, если для любой непрерывной функции $f : K \to \mathbf{R}$ существуют непрерывные функции $g, h, l : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, такие, что $f(x, y, z) = g(x) + h(y) + l(z)$ для всех точек $(x, y, z) \in K$.

Для произвольной функции $f : K \to \mathbf{R}$ на кресте K определим $g(x) := f(x, 0, 0)$, $h(y) := f(0, y, 0) - f(0, 0, 0)$ и $l(z) := f(0, 0, z) - f(0, 0, 0)$.

(b) Положим $g(0) = f(0, 0, 0)$, $h(0) = 0$, $l(0) = 0$,

$$2g(1) = f(0, 0, 0) + f(1, 1, 0) + f(1, 0, 1) - f(0, 1, 1),$$

$$2h(1) = -f(0, 0, 0) + f(1, 1, 0) - f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1)) \quad \text{и}$$

$$2l(1) = -f(0, 0, 0) - f(1, 1, 0) + f(1, 0, 1) + f(0, 1, 1).$$

(c)* Аналогично задаче 11(c) [St89, §2, Лемма 23.ii].

Гладкая базисность.

Пусть K — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$. Функция $f : K \to \mathbf{R}$ называется *дифференцируемой*, если для любой точки $z_0 \in K$ существуют такие вектор $a \in \mathbf{R}^2$ и бесконечно малая функция $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, что для любой точки $z \in K$ выполнено

$$f(z) = f(z_0) + a \cdot (z - z_0) + \alpha(z - z_0)|z, z_0|.$$

Здесь точка означает знак скалярного произведения векторов $a = (f_x, f_y)$ и $z - z_0 = (x, y)$, т.е. $a \cdot (z - z_0) = xf_x + yf_y$. Функция $\alpha : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ называется *бесконечно малой*, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое число $\delta > 0$, что для любой точки $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$\text{если} \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta, \quad \text{то} \quad |\alpha(x, y)| < \varepsilon.$$

Подмножество $K \subset \mathbf{R}^2$ плоскости называется *дифференцируемо базисным*, если для любой дифференцируемой функции $f : K \to \mathbf{R}$ существуют такие дифференцируемые функции $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ и $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, что для любой точки $(x, y) \in K$ выполняется $f(x, y) = g(x) + h(y)$.

13. (a) (b) (c) Решите аналоги задачи 6 для дифференцируемой базисности.

14. (a) График функции $|x|$ на отрезке $[-1, 1]$ является дифференцируемо базисным.

(b) Ломаная с последовательными вершинами $(-2,0)$, $(-1,1)$, $(0,0)$, $(1,1)$ и $(2,0)$ не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она непрерывно базисна.)

(c) Пополненная молния $\{([\frac{n+1}{2}]^{-1/2},[\frac{n}{2}]^{-1/2})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(0,0)\}$ не является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является также непрерывно базисной.)

(d) Пополненная молния $\{(2^{-[\frac{n+1}{2}]},2^{-[\frac{n}{2}]})\}_{n=1}^{\infty}\cup\{(0,0)\}$ является дифференцируемо базисной. (Заметим, что она не является непрерывно базисной.)

(e)** Существует ли непрерывное отображение отрезка в плоскость, образ которого является дифференцируемо базисным, но не непрерывно базисным?

15. (a) Крест $K=[(-1,-2),(1,2)]\cup[(-1,1),(1,-1)]$ не является дифференцируемо базисным.

(b)** **Гипотеза.** Подмножество $\{(t^2,\frac{t^2}{(1+t)^2})\}_{t\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]}$ плоскости не является дифференцируемо базисным. Указание: аналогично задаче 15(a).

(c)** **Гипотеза.** Кусочно-линейный граф на плоскости является гладко базисным тогда и только тогда, когда он не содержит сколь угодно длинных молний, и для любых двух *сингулярных* точек a и b выполнено $x(a)\neq x(b)$ и $y(a)\neq y(b)$. Точка $a\in K$ называется *сингулярной*, если пересечение K с любым диском с центром в a не является прямолинейным отрезком.

(d)** Найдите критерий дифференцируемой базисности для графов в плоскости.

16. Пусть K — подмножество плоскости $\mathbf{R}^2$ и $r\geq 0$. Функция $f:K\to\mathbf{R}$ называется *r раз дифференцируемой*, если для любой точки $z_0\in K$ существуют такие многочлен $\overline{f}(z)=\overline{f}(x,y)$ степени не выше r от двух переменных x и y и бесконечно малая функция $\alpha:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$, что $f(z)=\overline{f}(z-z_0)+\alpha(z-z_0)|z,z_0|^r$ для любой точки $z\in K$. (Это определение отличается от общепринятого.)

(a) Ноль раз дифференцируемые функции — это в точности непрерывные, а один раз дифференцируемые — это в точности дифференцируемые.

(b) Для любого целого положительного r определите r-дифференцируемую базисность подмножеств плоскости.

(c)** Для любого целого $k\geq 0$ найдется подмножество плоскости, r-дифференцируемо базисное для любого $r=0,1,\dots k$, но не r-дифференцируемо базисное ни для какого $r>k$ [RZ07].

(d)** Найдите критерий r-дифференцируемой базисности для графов в плоскости.

Решения задач.

13. (a), (b), (c) Аналогично задачам 6(a), 3(a) и 3(b).

14. (a) Пусть $f(x,y)$ - дифференцируемая функция. Тогда $f(x,|x|)-f(0,0)=ax+b|x|+\alpha(x,|x|)|(x,|x|)|$. Положим $h(y)=by$, $g(x)=f(x,|x|)-b|x|$. Подробнее см. [RZ07].

(b) Предположим, что данная ломаная дифференцируемо базисна. Мы знаем, что функция f дифференцируема в точках $(-1,1)$ и $(1,1)$. Следовательно, для достаточно малого $d>0$ имеют место следующие соотношения:

$$f(-1+d,1-d)-f(-1,1)=f_1d-f_2d+\alpha_{(-1,1)}(d,-d)|(d,-d)|,$$

$$f(-1-d,1-d)-f(-1,1)=-f_1d-f_2d+\alpha_{(-1,1)}(-d,-d)|(-d,-d)|,$$

$$f(1+d,1-d)-f(1,1)=f_3d-f_4d+\alpha_{(1,1)}(d,-d)|(d,-d)|\quad\text{и}$$

$$f(1-d,1-d)-f(1,1)=-f_3d-f_4d+\alpha_{(1,1)}(-d,-d)|(-d,-d)|.$$

Кроме того $f(x,y)=g(x)+h(y)$, где $g(x)$ и $h(y)$ дифференцируемы. Значит,

$$f(-1+d,1-d)-f(-1,1)=g(-1+d)-g(-1)+h(1-d)-h(1)=g'(-1)d-h'(1)d+\alpha(d)d\quad\text{и}$$

$$f(-1-d,1-d)-f(-1,1)=g(-1-d)-g(-1)+h(1-d)-h(1)=-g'(-1)d-h'(1)d+\alpha(d)d.$$

Таким образом, $h'(1) = f_2$ (и $g'(-1) = f_1$). Аналогично $h'(1) = f_4$. Следовательно, $h'(1) = f_2 = f_4$. Рассмотрим теперь функцию $f(x, y) = xy$, для неё $f_2 = -1 \neq f_4 = 1$.

(c) Предположим, что эта пополненная молния дифференцируемо базисна. Положим $a_n = ([\frac{n+1}{2}]^{-1/2}, [\frac{n}{2}]^{-1/2})$, $f(a_n) := \frac{(-1)^n}{n}$, $n = 2, 3, \ldots$. Если $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для некоторых функций $g(x)$ и $h(y)$, тогда $f(a_2) - f(a_3) + f(a_4) - \ldots$ сходится к $g(1) - g(0)$ (аналогично задаче 7d). Но это противоречит расходимости ряда $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$

(d) Не ограничивая общности можно считать, что $f(0, 0) = 0$, тогда возьмём $g(0) = 0$ и $h(0) = 0$. Положим

$$h(2^{-k}) = f(2^{-(k+1)}, 2^{-k}) - f(2^{-(k+1)}, 2^{-(k+1)}) + f(2^{-(k+2)}, 2^{-(k+1)}) - \ldots,$$
$$g(2^{-k}) = f(2^{-k}, 2^{-k}) - f(2^{-(k+1)}, 2^{-k}) + f(2^{-(k+1)}, 2^{-(k+1)}) - \ldots,$$

где правые части суть суммы знакопеременных рядов.

Теперь $g(x)$ и $h(y)$ могут быть продолжены до дифференцируемых функций $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

15. (a) Определим

$$w(0) = 0, \quad w(4^{-i} + 4^{-3i}) = w(4^{-i}) = 0 \quad \text{и} \quad w(4^{-i} + 4^{-3i-1}) = 2^{3i} \quad \text{для} \quad i = 1, 2, 3, \ldots.$$

Продолжим теперь эту функцию кусочно-линейно до функции $w : [0, 1] \to \mathbf{R}$. Для каждого $x \in [0, 1]$ определим $f(x, -x)$ как площадь под графиком функции w на отрезке $[0, x]$. На остальном кресте положим $f(x, y) = 0$.

Предположим, что $f(x, y) = g(x) + h(y)$ для некоторых дифференцируемых g и h. Не ограничивая общности, будем считать, что $g(0) = h(0) = 0$. Докажем, что g не дифференцируема в точке $x = 1/4$. (Таким же способом можно доказать, что g не дифференцируема в любой точке вида $x = 4^{-i}$.)

Рассматривая две бесконечные молнии из точек креста, начинающиеся в точках $(\frac{1}{4} + d, -\frac{1}{4} - d)$ и $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$ и сходящиеся к точке $(0, 0)$, заключаем, что

$$g\left(\frac{1}{4} + d\right) - g\left(\frac{1}{4}\right) = f\left(\frac{1}{4} + d, -\frac{1}{4} - d\right) - f\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) + f\left(\frac{1}{4^2} + \frac{d}{4}, -\frac{1}{4^2} - \frac{d}{4}\right) - f\left(\frac{1}{4^2}, -\frac{1}{4^2}\right) + \ldots$$

Для произвольного положительного $d < \frac{1}{4}$ существует k такое, что $4^{-3i} < d/4^{i-1}$ для всех $i > k$ и $4^{-3k} \geq d/4^{k-1}$. В частности $4^{-2k} \geq 4d > 4^{-2(k+1)}$. Таким образом,

$$2(g\left(\frac{1}{4} + d\right) - g\left(\frac{1}{4}\right)) > 2^{-3(k+1)} + 2^{-3(k+2)} + 2^{-3(k+3)} \ldots > 2^{-3(k+1)} \geq \frac{(4d)^{3/4}}{8}.$$

А это противоречит дифференцируемости функции g в точке $\frac{1}{4}$.

Набросок доказательства критерия базисной вложимости графов.

Достаточно доказать следующие три утверждения.

(a) Окружность S^1, пентод T_5 и крест с разветвленными концами C (рис. 1) не вложимы базисно в $\mathbf{R}^2$.

(b) Если конечный граф K не содержит ни одного из графов S^1, T_5 и C (рис. 1), то K содержится в R_n (рис. ?) для некоторого натурального n.

(c) Граф R_n (рис. ?) базисно вложим в $\mathbf{R}^2$ для каждого натурального n.

Набросок доказательства утверждения (b). Докажем, что *дерево K с n невисячими вершинами, не содержащее графов T_5 и C, содержится в R_n.* Возьмем произвольную вершину $a \in K$. Поскольку K не содержит T_5 и C, то $\deg a \leq 4$, причем если $\deg a = 4$, то a имеет висячее ребро. Значит, окрестность точки a из K можно вложить в R_n так, что a попадет в центр R_n, а эта окрестность перейдет в окрестность T_4 центра R_n. С каждой вершиной, соседней с a поступаем аналогично. Поскольку 'глубина' графа R_n (количество невисячих вершин на самой длинной ветви от центра) равна n, а невисячих вершин в K ровно n, то, продолжая этот процесс дальше, мы сможем вложить в R_n весь граф K. QED

См. примеры базисных вложений графов R_1, R_2, R_3 на рисунке в [KS97, KS98]. Для $n > 3$ базисные вложения строятся аналогично. Это доказывает утверждение (c).

Доказательство базисной невложимости окружности. [St89] Пусть задано вложение окружности $S \subset \mathbf{R}^2$. Покажем, что для любого n $E^n(S) \neq \emptyset$. Тогда это вложение не является базисным. Действительно, на первом шаге в S закрашивается в белый цвет не более 4-х точек (это точки, в которых существуют опорные прямые, параллельные координатным осям и пересекающие K ровно в одной точке). Если после n-го шага закрашено белым цветом k точек, то на следующем шаге закрашивается не более $2k$ точек. В самом деле, если закрашивается точка $a \in E^n(S)$, то хотя бы на одной из двух прямых, проходящих через a и параллельных координатным осям, есть закрашенная ранее точка. В противном случае каждая из этих прямых высекает в $E^n(S)$ не менее 2-х точек, т.е. a не может быть закрашена на $(n+1)$-ом шаге. Итак, после конечного числа шагов будет закрашено конечное число точек, т.е. $E^n(S) \neq \emptyset$ для любого n.QED

Доказательство базисной невложимости пентода. Предположим, что пентод T_5 базисно вложен в плоскость. Пусть d — вершина пентода. Из условия $E^n(T_5) = \emptyset$ для некоторого n следует, что существует максимальное k такое, что $E^k(T_5)$ содержит проколотую окрестность U вершины d в T_5. Тогда на $(k+1)$-ом шаге в *одном* из ребер $A \subset T_5$ закрашивается в белый цвет некоторая последовательность точек a_n, сходящаяся к d. Значит (при необходимости переходя к подпоследовательности в a_n и меняя направление оси x), мы можем считать, что одна из прямых $x = x(a_i)$ или $y = y(a_i)$ не содержит других точек из $E^k(T_5)$, кроме a_i. Поскольку окрестность $(U - A) \cup d \cong T_4$ связна, она лежит по одну сторону от всех этих прямых, т.е., в полуплоскости $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$. При этом $E^n(T_4) = \emptyset$, т.е.

некоторый крест $T_4 \subset T_5$ базисно вложен в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}$ так, что $d = (0,0)$.

Теперь аналогично доказывается, что

некоторый триод $T_3 \subset T_4$ базисно вложен в $\mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+$ или в $0 \times \mathbf{R}$ так, что $d = (0,0)$.

Второй случай невозможен. Теперь аналогично доказывается, что

некоторый диод $T_2 \subset T_3$ базисно вложен в луч $\mathbf{R}_+ \times 0$ так, что $d = (0,0)$.

Получили противоречие. QED

Доказательство базисной невложимости креста с разветвленными концами. Предположим, что C базисно вложен в плоскость. Аналогично доказательству базисной невложимости пентода получаем, что

если крест T_4 базисно вложен в плоскость $\mathbf{R}^2$, то одна из его ветвей содержит прямолинейный отрезок с концом в вершине креста, параллельный одной из координатных осей.

Теперь базисная невложимость графа C вытекает из следующей леммы. QED

Лемма о схлопывании. *Пусть K — конечный граф, $K \subset_b \mathbf{R}^2$. Определим отображение*

$$q : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2 \quad \textit{формулой} \quad q(x,y) = \begin{cases} (x,y), & x < a \\ (a,y), & a \le x \le b \\ (x-(b-a),y), & x > b \end{cases}.$$

(a) $q|_{K-[a,b]\times c}$ инъективно;

(b) $q(K)$ базисно вложено в плоскость $\mathbf{R}^2$.

Доказательство. (a) Пусть, напротив, две точки из $K - [a,b] \times c$ склеиваются при схлопывании q. Тогда они лежат в полосе $[a,b] \times \mathbf{R}$ и имеют одну ординату d. Тогда эти точки (x_1,d), (x_2,d) вместе с (x_1,c), (x_2,c) являются вершинами прямоугольника со сторонами, параллельными координатным осям. Это множество не базисно в $\mathbf{R}^2$. Противоречие.

(b) Достаточно доказать, что если $q(K)$ содержит молнию $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ длины n, то и K содержит молнию длины n. Если $q^{-1}(A)$ — молния в K, то нужное утверждение доказано. Иначе найдутся точки a_i, a_{i+1} — вершины вертикального звена — такие, что $p_x(a_i) = p_x(a_{i+1})$. Тогда добавим к $q^{-1}(A)$ точки $(x(q^{-1}(a_i)), c)$ и $(x(q^{-1}(a_{i+1})), c)$ (здесь полагаем $q^{-1}(a,c) = (a,c)$). Проделав такую операцию несколько раз, получим молнию в K длины больше n. QED

ЛИТЕРАТУРА

[Ar58] В. И. Арнольд, *О представлении функций нескольких переменных в виде суперпозиции функций меньшего числа переменных,* Мат. Просвещение, 3 (1958), 41–61. http://www.mccme.ru/free-books

[Ar58'] В. И. Арнольд, *Проблема 6,* Мат. Просвещение, 3 (1958), 273-274.
http://www.mccme.ru/free-books

[Vo81] С. М. Воронин, Функциональный анализ, 15 (1981).

[Vo82] С. М. Воронин, Функциональный анализ, 16 (1982).

[KS97] В. Курлин и А. Скопенков, *Базисные вложения графов в плоскость*, Мат. Образование, 3 (1997), 105–113.

[KS98] В. Курлин и А. Скопенков, *Базисные вложения графов в плоскость,* в кн.: 9-я летняя конференция Турнира Городов, изд-во МЦНМО (1998), 34–44, 106–113.

[Ku68] К. Куратовский, Топология, Мир, Москва, 1969, т. 1,2

[Ku00] V. Kurlin, *Basic embeddings into products of graphs,* Topol.Appl. 102 (2000), 113–137.

[Ku03] V. A. Kurlin, *Basic embeddings of graphs and the Dynnikov method of three-pages embeddings (in Russian),* Uspekhi Mat. Nauk, 58:2 (2003), 163–164. English transl.: Russian Math. Surveys, 58:2 (2003).

[Ku03'] В. А. Курлин, Базисные вложения графов и метод трехстраничных вложений Дынникова, диссертация (2003), www.geocities.com/vak26

[MKT03] N. Mramor-Kosta and E. Trenklerova, *On basic embeddings of compacta into the plane,* Bull. Austral. Math. Soc. 68 (2003), 471–480.

[Pr04] В. В. Прасолов, Элементы комбинаторной и дифференциальной топологии, Москва, МЦНМО, 2004. http://www.mccme.ru/prasolov

[PSSZ]

[RZ07] D. Repovs and M. Zeljko, *On basic embeddings into the plane,* Rocky Mountain J. Math., to appear.

[Sk95] A. Skopenkov, *A description of continua basically embeddable in* $\mathbf{R}^2$*,* Topol. Appl. 65 (1995), 29–48.

[Sk05] А. Скопенков, Вокруг критерия Куратовского планарности графов, Мат. Просвещение, 9 (2005), 116–128 и 10 (2006), 276–277. http://www.mccme.ru/free-books/matprosa.html

[Sk] А. Б. Скопенков, Алгебраическая топология с элементарной точки зрения, Москва, МЦНМО, в печати. http:// dfgm.math.msu.su/ files/skopenkov/obstruct2.ps

[SS06] А. Скопенков и И. Шнурников, 18-я летняя конференция Турнира Городов,
http://olympiads.mccme.ru/lktg/2006/5/index.htm

[St89] Y. Sternfeld, *Hilbert's 13th problem and dimension,* Lect. Notes Math. 1376 (1989), 1–49.

[Tr] E. Trenklerova, *Constructive decomposition of a function of two variables as a sum of functions of one variable*, Proc. AMS, to appear.

[Vi04] А. Г. Витушкин, Успехи Мат. Наук (2004).