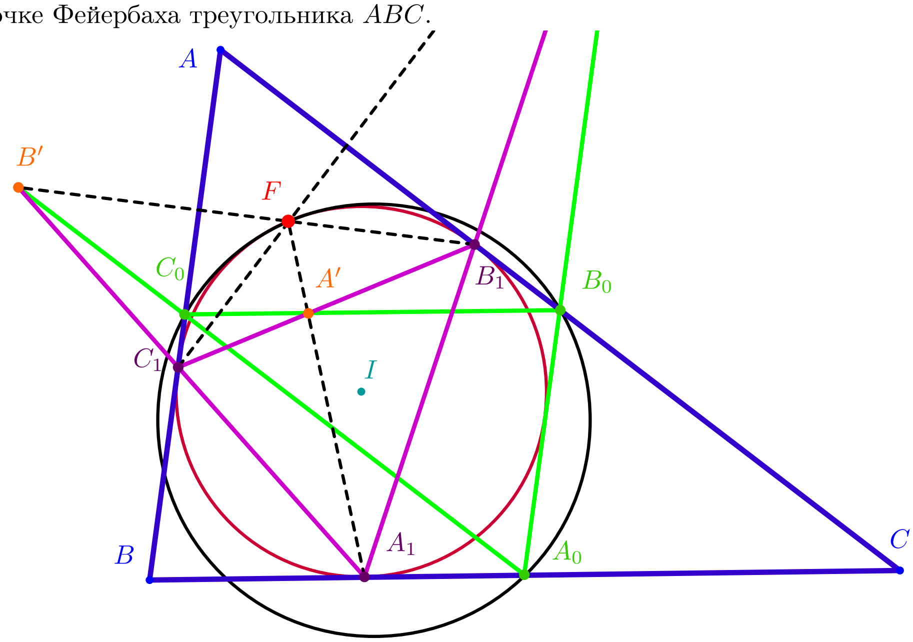
Еще несколько прямых,
проходящих через точку Фейербаха.

Ивлев Фёдор.
СУНЦ МГУ

Теорема: Дан треугольник ABC. A_1, B_1, C_1 - точки касания сторон BC, AC и AB с вписанной окружностью соответственно. A_0, B_0, C_0 - середины сторон. Обозначим точку пересечения прямых A_0B_0 и A_1B_1 через C'. Аналогично определяются точки A' и B'. Тогда прямые A_1A', B_1B', C_1C' пересекаются в точке Фейербаха треугольника ABC.



В ходе доказательства этого факта я рассмотрел треугольник, у которого ортотреугольником является серединный треугольник исходного треугольника. У него было замечено несколько интересных свойств, которые и привели к доказательству теоремы. Леммы, которые возникают в процессе доказательства, сами по себе являются интересными фактами:

1. Обозначим точку пересечения прямых CI и C_1A_1 через C_A, CI и C_1B_1 – через C_B. Тогда C_A лежит на C_0B_0.

2. Аналогично определим точки A_B, A_C, B_A, B_C. Тогда точки C_A, C_B, A_B, A_C лежат на одной окружности, ортогональной вписанной окружности с центром в O_A.

3. O_A и два центра аналогичных окружностей (обозначим их за O_B и O_C) лежат на прямых $B'C'$, $A'C'$ и $A'B'$ соответственно.

4. Обозначи за M_A середину стороны O_BO_C треугольника $O_AO_BO_C$. Тогда M_A лежит на прямой A_1A'.

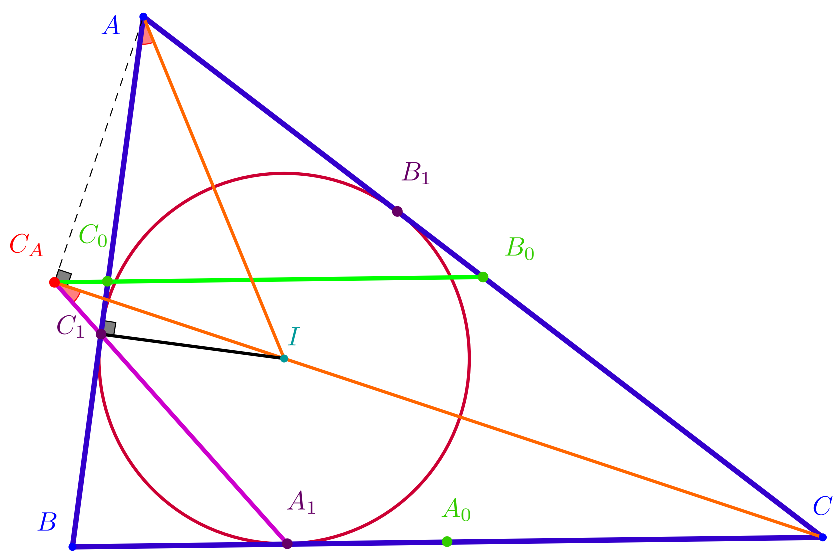
5. Даны точки A_1, B_1, C_1 на сторонах треугольника. A_0, B_0, C_0 – середины сторон $\triangle ABC$. Точка пересечения A_1B_1 с A_0B_0 – A_1'. Аналогично определяются B_1' и C_1'. Точка A_2 симметрична точке A_1 относительно A_0. Аналогично определяются точки B_2 и C_2. Точка пересечения A_2B_2 с A_0B_0 – A_2'. Аналогично определяются B_2' и C_2'. Тогда прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' пересекаются в одной точке.

При доказательстве лемм используются некотороые факты из статьи [1]. А именно: вершины A, B и C лежат на сторонах треугольника $A'B'C'$, и каждая из вершин треугольника $A'B'C'$ является полюсом противоположной стороны относительно вписанной окружности.

Обозначим центр вписанной окружности $\triangle ABC$ через I.

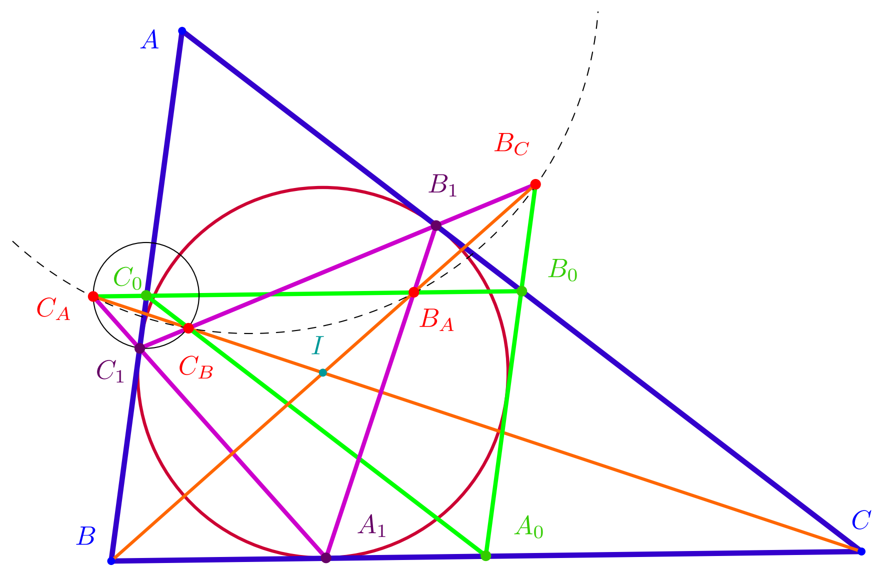
Обозначим точку пересечения прямых CI и C_1A_1 через C_A, CI и C_1B_1 – через C_B. Аналогично определяются точки A_B, A_C, B_A, B_C.

Лемма 1. C_A лежит на средней линии $\triangle ABC$ параллельной BC.



Доказательство: $\angle B = 180^\circ - \angle A - \angle C \Rightarrow \angle BA_1C_1 = \frac{180^\circ - \angle B}{2} = \frac{\angle A + \angle C}{2} \Rightarrow \angle(A_1B,\, A_1C_1) = \angle(A_1C,\, CI) + \angle(AI,\, AC_1) \Rightarrow \angle(AI,\, AC_1) = \angle(A_1B,\, A_1C_1) - \angle(A_1C,\, CI) = \angle(A_1C,\, A_1C_A) - \angle(CA_1,\, CC_A) = \angle(IC_A,\, CA_1) + \angle(A_1C,\, C_1C_A) = \angle(IC_A,\, C_AC_1)$. Следовательно, точки A, C_1, C_A, I лежат на одной окружности. Тогда $\angle AC_1I = \angle AC_AI = 90^\circ$. Следовательно, B_0 – центр описанной окружности $\triangle AC_AC$. Получаем, что $\angle C_AB_0A = 2\angle C_ACA = \angle C \Rightarrow C_AB_0 \parallel BC$, то есть C_AB_0 – средняя линия. Аналогично для остальных точек. $\triangleright$

Лемма 2. Точки A_B, A_C, B_A, B_C лежат на одной окружности.



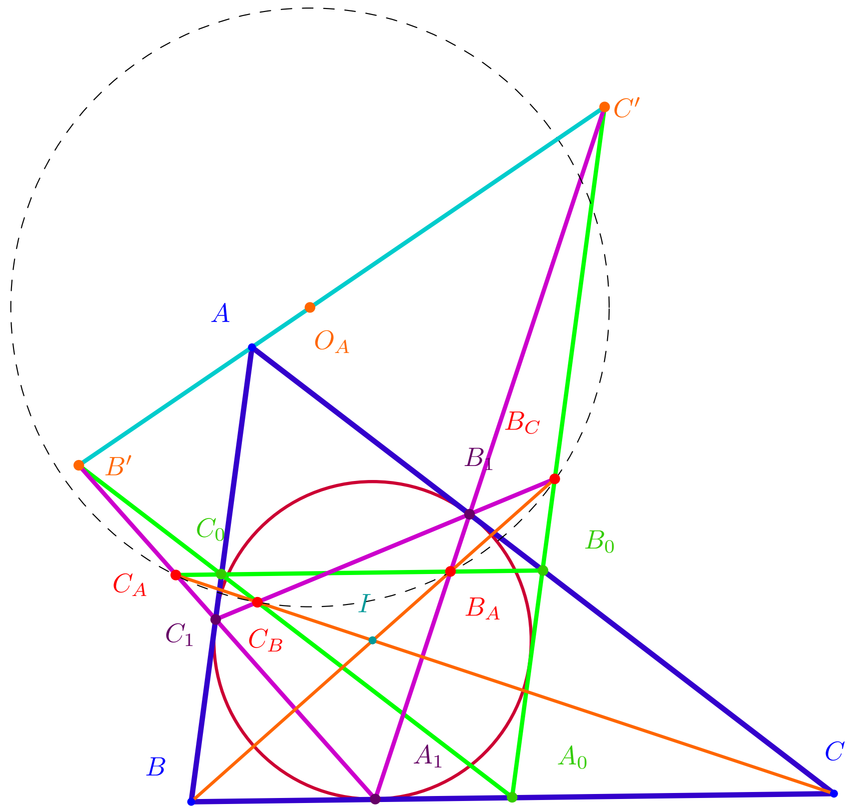
Доказательство: Заметим, что так как $C_0C_A \parallel BC$, то все стороны $\triangle C_1C_0C_A$ параллельны соответственным сторонам $\triangle C_1BA_1$. А следовательно, он тоже равнобедренный. То есть $C_0C_1 = C_0C_A$. По аналогичным причинам $C_0C_1 = C_0C_B$. Следовательно, C_0 – центр описанной окружности $\triangle C_AC_1C_B$. Так как центр этой окружности лежит на касательной к вписанной окружности в точке C_1, то сама окружность ортогональна вписанной окружности. Следовательно, так как точки C_A и C_B лежат на одной прямой с I, они инверсны относительно вписанной окружности. Аналогично инверсны A_B и A_C, а так же B_A и B_C. Следовательно, точки A_B, A_C, B_A, B_C лежат на одной окружности, ортогональной вписанной окружности. Назовем эту окружность ω_C. Аналогично определим окружности ω_A, ω_B. Их центры обозначим O_A, O_B и O_C соответственно. $\triangleright$

Так как окружности ω_A, ω_B и описанная окружность $\triangle C_AC_BC_1$ проходят через точки C_A и C_B, то их центры лежат на одной прямой. То есть C_0 лежит на прямой O_AO_B. Аналогично $B_0 \in O_AO_C$ и $A_0 \in O_BO_C$. Причем $O_AO_B \perp C_AC_B$, то есть перпендикулярна биссектрисе угла C. Для остальных сторон треугольника $O_AO_BO_C$ аналогично.

Проведем через точки A_0, B_0, C_0 прямые параллельные биссектрисам углов A, B и C соответственно. Тогда это будут биссектрисы соответственных углов в $\triangle A_0B_0C_0$, а следовательно, они пересекаются в одной точке.

Заметим, что прямая O_AO_C перпендикулярна биссектрисе угла B_0 треугольника $A_0B_0C_0$, так как последняя параллельна биссертисе угла B, проходящей через точки B_A и B_C. То есть O_AO_C – внешняя биссектриса $\triangle A_0B_0C_0$. Из ананлогичных рассуждений для прямых O_AO_B и O_BO_C получаем, что O_A, O_B и O_C – центры вневписанных окружностей Следовательно, $\triangle A_0B_0C_0$ является ортотреугольником треугольника $O_AO_BO_C$, откуда получаем, что окружность Эйлера $\triangle O_A O_B O_C$ совпадает с окружностью Эйлера $\triangle ABC$.

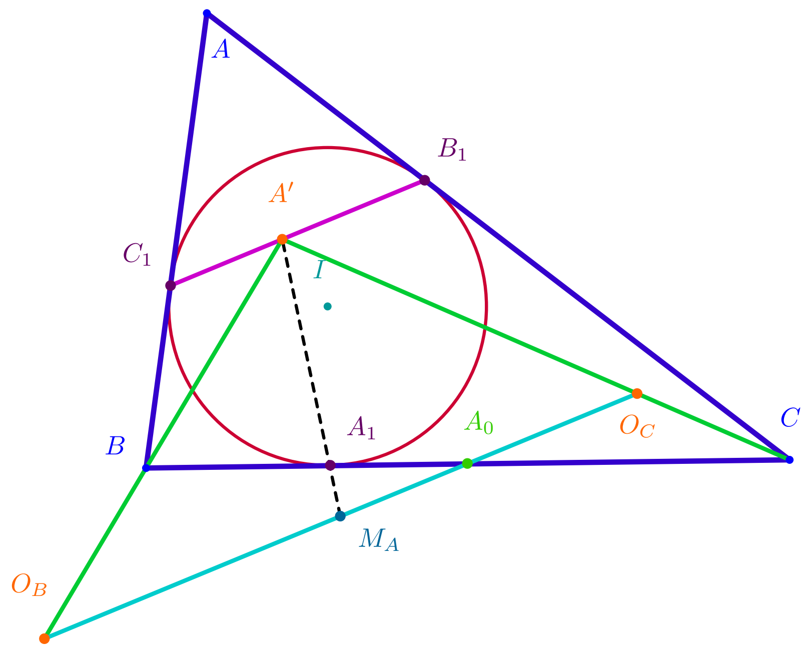
Лемма 3. O_A лежит на $B'C'$.



Доказательство: Обозначим вписанную окружность треугольника ABC через ω. Напомним, что окружности ω и ω_A ортогональны. Обозначим за K и L точки их пересечения. Тогда O_AK и O_AL – касательные к ω, так как ω ортогональна ω_A. Следовательно, поляра O_A относительно ω – прямая KL. Также KL является полярой I относительно ω_A. Как мы знаем, A' – полюс $B'C'$ относительно ω. Следовательно, для того чтобы показать, что O_A лежит на $B'C'$, достаточно показать, что поляра O_A проходит через A'. То есть, что A' лежит на KL. Для этого достаточно заметить, что I – точка пересечения C_AC_B и B_AB_C, а A' – точка пересечения C_AB_A и C_BB_C. Следовательно, A' лежит на поляре I относительно ω_A, то есть на KL, ч.т.д. $\triangleright$

Обозначим середины сторон $\triangle O_A O_B O_C$ через M_A, M_B и M_C.

Лемма 4. Точки M_A, A_1, A' лежат на одной прямой.



Доказательство: Q – точка пересечения прямых B_1C_1 и BC. Тогда, так как прямые AA_1, BB_1, CC_1 пересекаются в одной точке, то по теореме о полном четырехвершиннике $(B, C, A_1, Q) = -1$. Спроецируем это двойное отношение из точки A' на прямую O_BO_C. При этом Q перейдет в бесконечно удаленную точку, точки B и C перейдут в O_B и O_C, а следовательно, A_1 перейдет в середину отрезка O_BO_C, то есть в точку M_A. Следовательно, точки M_A, A_1, A' лежат на одной прямой. $\triangleright$

Рассмотрим треугольники $M_AM_BM_C$ и $A_1B_1C_1$. Соответственные стороны у них перпендикулярны соответствующим биссектрисам треугольника $\triangle ABC$, а значит параллельны между собой. Следовательно, эти треугольники гомотетичны. Так как описанная окружность треугольника $M_AM_BM_C$ является окружностью Эйлера треугольника ABC, а описанная окружность треугольника $A_1B_1C_1$ – вписанной окружностью треугольника ABC, то центром гомотетии будет точка Фейербаха треугольника ABC. Следовательно, прямые A_1A', B_1B', C_1C', проходящие через соответствующие вершины треугольника, пересекаются в точке Фейербаха, ч.т.д.

Возьмем вместо точек A_1, B_1, C_1 точки касания вневписанных окружностей со сторонами – точки A_2, B_2, C_2. Для них аналогичным образом определим точки $A''B''C''$. Тогда прямые $A''A_2$, $B''B_2$, $C''C_2$ также пересекутся в точке Фейербаха.

Докажем более общий факт, а именно:

Лемма 5. Даны точки A_1, B_1, C_1 на сторонах треугольника. A_0, B_0, C_0 - середины сторон треугольника ABC. Точка пересечения A_1B_1 с A_0B_0 – A_1'. Аналогично определяются B_1' и C_1'. Точка A_2 – образ точки A_1 при гомотетии в A_0 с коэффициентом k. Аналогично определяются точки B_2 и

C_2 (коэффициент k для всех трех точек одинаковый). Для них определим точки A_2', B_2', C_2' аналогичным образом. Тогда прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1', A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' пересекаются в одной точке.

Доказательство: Сначала покажем, что прямые A_1A_1', B_1B_1', C_1C_1' пересекаются в одной точке. Так как точки A_2, B_2, C_2 тоже лежат на сторонах треугольника ABC, то прямые A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' тоже будут пересекаться в одной точке.

Сделаем аффинное преобразование, переводящее $\triangle ABC$ в правильный. Тогда точки A_0, B_0, C_0 перейдут в середины сторон нового треугольника, так как аффинное преобразование сохраняет отношения на прямой. В свою очередь точки A_1, B_1, C_1 перейдут в какие-то точки на сторонах. При этом точки A_2, B_2, C_2 будут по прежнему гоммотетичны точкам A_1, B_1, C_1 с тем же коэффициентом k. То есть условие леммы можно считать сохранившимся.

Обозначим длину высоты из A_1 на стороны A_0B_0 и A_0C_0 через h_A. Аналогично определим h_B и h_C. Положим в точки A_1, B_1, C_1 массы $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}$ и $\frac{1}{h_C}$ соответственно. Заметим, что в этом случае массы точек A_1 и B_1 группируются в точку C_1', так как $A_1C_1' \cdot \frac{1}{h_A} = \sin\angle(A_0B_0, A_1B_1) = B_1C_1' \cdot \frac{1}{h_B}$. Следовательно, центр масс всей системы будет лежать на прямой C_1C_1'. Аналогично показывается, что он лежит и на прямых A_1A_1' и B_1B_1'. Следовательно, эти прямые пересекаются в одной точке. Пусть это точка M. Так как M – центр масс, то $\overrightarrow{MA_1} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{MB_1} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{MC_1} \cdot \frac{1}{h_C} = 0$. А следовательно, и $(\overrightarrow{MA_0} + \overrightarrow{A_0A_1}) \cdot \frac{1}{h_A} + (\overrightarrow{MB_0} + \overrightarrow{B_0B_1}) \cdot \frac{1}{h_B} + (\overrightarrow{MC_0} + \overrightarrow{C_0C_1}) \cdot \frac{1}{h_C} = \overrightarrow{MA_0} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{MB_0} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{MC_0} \cdot \frac{1}{h_C} + \overrightarrow{A_0A_1} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{B_0B_1} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{C_0C_1} \cdot \frac{1}{h_C} = 0$. Заметим, что $\overrightarrow{A_0A_1} \cdot \frac{1}{h_A}$ – вектор коллинеарный вектору $\overrightarrow{BC}$ и по длине равный $\frac{1}{\sin 60^\circ}$. А следовательно, сумма трех таких векторов равна нулю. Откуда получаем, что $\overrightarrow{MA_0} \cdot \frac{1}{h_A} + \overrightarrow{MB_0} \cdot \frac{1}{h_B} + \overrightarrow{MC_0} \cdot \frac{1}{h_C} = 0$. То есть M – еще и центр масс системы точек A_0, B_0, C_0 с массами $\frac{1}{h_A}, \frac{1}{h_B}, \frac{1}{h_C}$ соответственно. Заметим, что аналогичные рассуждения верны и для точек A_2, B_2, C_2. А так как высоты из них относятся к высотам из точек A_1, B_1, C_1 с коэффициентом k, то полученные массы будут пропорциональны массам, получившимся в рассуждении о точках A_1, B_1, C_1. А следовательно, точка пересечения прямых A_2A_2', B_2B_2', C_2C_2' есть так же центр масс точек A_0, B_0, C_0 с массами $\frac{1}{h_A}$, $\frac{1}{h_B}$, $\frac{1}{h_C}$ соответственно. То есть совпадает с M. Следовательно, все шесть прямых проходят, через одну точку. Лемма доказана. $\triangleright$

Заметим, что условие того что три прямые пересекаются в одной точке сохраняется при проективных преобразованиях. Так что в условии леммы можно заменить серединный треугольник на произвольный чевианный. А для сохранения условия равенства отношений после проективного преобразования можно потребовать, чтобы двойные отношения точек (A, B_1, B_0, C) и (C, B_2, B_0, A) относились так же как и две аналогичные пары четверок точек. В частности красивым фактом является что, если взять за треугольник $A_0B_0C_0$ треугольник из оснований биссектрис треугольника, а за точки A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2 взять чевианные треугольники двух изогонально сопряженных точек.

Применив нашу лемму к точкам касания вписанной и точкам касания вневписанных окружностей получаем, что прямые A_2A'', B_2B'', C_2C'' тоже пересекаются в точке Фейербаха $\triangle ABC$.

Заметим, что данный результат обобщается для случая вневписанной окружности.

[1] Л.А.Емельянов, Т.Л.Емельянова "Семейство Фейербаха" (ЛКТГ Избранные материалы Выпуск 1, стр. 114-131), М, МЦНМО, 2009.