Степенные последовательности ориентированных графов

А. Рухович

В данной работе исследуются критерии существования планарных орграфов с заданными степенными последовательностями. Четкие формулировки см.ниже. Аналогичные критерии без условия планарности справедливы и доказываются еще более просто.

Для последовательностей $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ и $b_1, b_2, b_3, ...b_n$ степеней входа и степеней выхода произвольного орграфа выполняется условие

(*) $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$.

Действительно, количество ребер орграфа одновременно равно и числу 'выходов ребер из вершин', и числу 'входов ребер в вершины'.

Теорема LM. *Планарный ориентированный граф на n вершинах со степенями входа $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ и степенями выхода $b_1, b_2, b_3, ...b_n$ существует тогда и только тогда, когда выполнено условие (*).*

В графе без петель степень выхода a_i вершины i меньше суммы степеней входа остальных вершин. Поэтому в любом графе без петель со степенями входа $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ и степенями выхода $b_1, b_2, b_3, ...b_n$ выполнено условие

(**) $a_i + b_i \leq b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$ для любой вершины i.

Теорема M. *Планарный орграф без петель на n вершинах степеней входа $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ и степеней выхода $b_1, b_2, b_3, ...b_n$ существует тогда и только тогда, когда выполнены условия (*) и (**).*

Число ребер в орграфе со степенями входа $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ равно $a_1 + a_2 + ... + a_n$. В связном графе не менее $n - 1$ ребер. Значит, если наш орграф слабо связен, то

(***) $a_1 + a_2 + ... + a_n \geq n - 1$.

Теорема LMc. *Слабо связный планарный ориентированный граф на n вершинах со степенями входа $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ и степенями выхода $b_1, b_2, b_3, ...b_n$ существует тогда и только тогда, когда выполнены условия (*) и (***).*

Теорема Mc. *Слабо связный планарный орграф без петель на n вершинах степеней входа $a_1, a_2, a_3, ...a_n$ и степеней выхода $b_1, b_2, b_3, ...b_n$ существует тогда и только тогда, выполнены условия (*), (**) и (***).*

Доказательство теоремы LM. Часть 'тогда' доказана выше. Докажем часть 'только тогда'. Возьмем n вершин $1, 2, \dots, n$. Построим в i-й вершине $\min\{a_i, b_i\}$ петель.

Назовем вершину i • *источником*, если $a_i > b_i$, • *нейтралом*, если $a_i = b_i$, • *стоком*, если $a_i < b_i$.

Нарисуем на плоскости x точек, где x равно сумме $a'_i := a_i - b_i$ по каждому источнику i. Назовем эти точки вершинками (не вершинами). Нарисуем на плоскости a'_i стрелок (не ребер), выходящих из источника i в вершинки под номерами от $a'_1 + \ldots + a'_{i-1} + 1$ до $a'_1 + \ldots + a'_i$. Аналогично, нарисуем на плоскости $b'_i := b_i - a_i$ стрелок, выходящих из вершинок под номерами от $b'_1 + \ldots + b'_{i-1} + 1$ до $b'_1 + \ldots + b'_i$. Все эти начала и концы рисуем попарно непересекающимися вне (уже нарисованных) петель. Так как $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$, то общее количество стрелок, входящих в вершины равно количеству стрелок, входящих в вершины. Так же, в каждую вершинку входит одна стрелка и выходит одна стрелка. Теперь удалим каждую вершинку i и стрелки, входящую и выходящую из нее. Вместо них построим ребро между вершиной, из которой выходила стрелка в i, и вершиной, в которую входила стрелка из i. Это можно сделать, чтобы полученный граф не имел самопересечений (см. рис.1).

Получится планарный орграф с заданными степенями вершин. QED

Доказательство теоремы M. Часть 'только тогда' доказана выше. Докажем часть 'тогда'. По теореме LM существует нарисованный на плоскости без самопересечений орграф G с требуемыми степенями вершин. (Но он, возможно, имеет петли. Чтобы получить граф без петель, будем удалять петли.) Пусть есть петля в вершине i.

Докажем, что в некоторой грани графа G, содержащей i найдется ребро jk такое, что вершины j и k отличны от i. Действительно, если такого ребра нет, то и во всем графе нет ребра, обе вершины которого отличны от i. Но тогда все ребра графа либо входят в i, либо выходят из i. Так как есть петля в вершине i, то $a_i + b_i > b_1 + b_2 + b_3 + ... + b_n$. Полученное противоречие доказывает требуемое утверждение.

Удалим ребро jk и петлю в i. Дополним граф ребрами ji и ik как на рисунке 2, т.е. чтобы полученный граф был планарным. Нетрудно заметить, что степени вершин графа при этом не изменились. Поскольку вершины j и k отличны от i, то новых петель не появилось. Тогда количество петель сократилось на один. Такими операциями можно удалить все петли в графе, не меняя степеней вершин. Получится искомый орграф без петель. QED

Доказательство теоремы LMc. Часть 'только тогда' фактически доказана выше. Докажем часть 'тогда'. По теореме LM существует планарный граф G с нужными степенями вершин. Пусть он содержит q компонент слабой связности, где $q > 1$. Из условия (***) вытекает, что в графе не менее $n - 1$ ребер. Так как $n - 1 > n - q$, то хотя бы в одной компоненте слабой связности есть *неориентированный цикл* (т.е. цикл, в котором ребра могут быть ориентированы в разные стороны). Возьмем ребро ij этого цикла и произвольное ребро kl компоненты слабой связности, не включающей этот цикл. Удалим эти ребра и добавим ребра il и kj, как на рисунке 3. Степени вершин сохранились, число компонент слабой связности понизилось на одну. Планарность графа сохранилась. Такими операциями можно понизить число компонент слабо связности до одной. Получится слабо связный граф. QED

Часть 'тогда' в теореме Mc выводится из теоремы M аналогично, поскольку при применении описанной операции не могут появиться петли (из-за того, что ребра ij и kl были в разных компонентах слабой связности).