Теорема о замыкании

В. Болбачан

6 декабря 2010 г.

1 Результаты

Существует несколько простых геометрических фактов, иллюстрируемых красивыми картинками(см. рис.). Обобщением этой закономерности является следующий результат:

Теорема 1.1. *Дана последовательность* $(a_1, ..., a_{2m})$, $a_i \in \{1, \ldots, n\}$ *такая, что для любого* $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ *в множестве* $\{i \mid a_i = k\}$ *количество четных и нечетных чисел одинаково. Пусть на плоскости задана система координат* XOY *и дано* n *прямых* $l_1, l_2, \ldots, l_n$ *не паралельных координатным осям, пересекающихся в точке* O.

Пусть $x_1 \in l_{a_1}, x_1 \neq O$. *Если точка* x_s *постороена, то точка* x_{s+1} *строится как точка пересечения прямой* $l_{a_{s+1}}$ *с прямой проходящей через точку* x_s *паралельно прямой* OX, *если* s *четно и* OY, *если* s *нечетно. Тогда* $x_1 = x_{2m+1}$.

Похожее утверждение было сформулировано в [?]. Другие теоремы о замыкании приведены в [?],[?].

Пусть на плоскости введена система координат XOY. Замкнутой молнией называется последовательность из $2N$ точек $A_1, A_2, \ldots, A_{2N}$, такая что отрезки $A_1A_2, A_3A_4, \ldots, A_{2N-1}A_{2N}$ паралельны оси OX, а отрезки $A_2A_3, A_4A_5, \ldots, A_{2N}A_1$ паралельны оси OY.

Теорема 1.2. *На плоскости нарисованы пять попарно непаралельных отрезков с общей вершиной, не паралельных координатным осям. Тогда их объеденение содержит замкнутую молнию.*

Замечание. По-видимому Теорема 1.2 верна и для случая когда, некоторые из отрезков паралльны координатным осям.

2 Доказательства

Доказательство Теоремы 1.1. Обозначим через y_i проекцию точки x_i на ось OY. Пусть прямые l_i задаются уравнениеями $y = k_i x$. Тогда $y_{i+1} = \frac{k_{a_{i+1}}}{k_{a_i}} y_i$ для нечетного i и $y_{i+1} = y_i$ для четного i. Поэтому

$$y_{2m} = \frac{a_{k_2}}{a_{k_1}} \cdot \frac{a_{k_4}}{a_{k_3}} \cdots \frac{a_{k_{2m}}}{a_{k_{2m-1}}} y_1 = y_1$$

Последнее равенства верно, так как каждое число в числителе встречается столько же раз сколько в знаменателе. Следовательно $y_{2m} = y_1$. □

Доказательство Теоремы 1.2. Для доказательства теоремы достаточно показать, что объеденение пяти различных лучей с общей вершиной содержит замкнутую молнию. Будем считать,что общая вершина лучей совпадает с началом координат. Если лучи не паралельны координатным осям, то возможны только следующие 4 случая.

Обозначим для луча l через l' прямую содержащую этот луч.

1. *Три луча находятся в одно четверти.* Пусть эти лучи суть l_1, l_2, l_3. Применим Теорему 1.1 к последовательности $(3, 1, 2, 3, 1, 2)$, прямым l'_1, l'_2, l'_3 и точке $a_1 \in l_3$. Так как все три луча расположены в одной четверти, то прямая, паралельная координатной оси пересекающая один из лучей, пересекает все остальные. Поэтому все точки замкнутой молнии лежат на лучах l_1, l_2, l_3. QED

Обозначим черер $n(l)$ номер четверти в которой находится луч l. Понятно, что если взять точку $x \in l_1$ и провести через нее прямую паралельную оси OX то она пересечет луч l_2 тогда и только тогда когда $\{n(l_1), n(l_2)\} \in M_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}\}$. Точно также если взять точку $x \in l_1$ и провести через нее прямую паралельную оси OY то она пересечет луч l_2 тогда и только тогда когда $\{n(l_1), n(l_2)\} \in M_2 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}\}$.

2. *Четыре отрезка находятся по два в двух смежных четвертях.* Пусть эти лучи суть l_1, l_2, l_3, l_4. Будем считать, что $n(l_1) = n(l_2) = 1, n(l_3) = n(l_4) = 4$. Применем Теорему 1.1 к последовательности $(3, 1, 2, 3, 4, 2, 1, 4)$, прямым l'_1, l'_2, l'_3, l'_4 и точке $A_1 \in l_3$. Имеем $\{n(l_3), n(l_1)\} = \{1, 4\} \in M_2; \{n(l_1), n(l_2)\} = \{1\} \in M_1; \{n(l_2), n(l_3)\} = \{1, 4\} \in M_2; \{n(l_3), n(l_4)\} = \{4\} \in M_1; \{n(l_4), n(l_2)\} = \{1, 4\} \in M_2; \{n(l_2), n(l_1)\} = \{1\} \in M_1; \{n(l_1), n(l_4)\} = \{1, 4\} \in M_2; \{n(l_4), n(l_3)\} = \{4\} \in M_1$. Следовательно все точки лежат на лучах l_1, l_2, l_3, l_4. QED

3. *Четыре луча находятся по два в двух несмежных четвертях и еще один луч в четверти смежной к двум данным.* Пусть эти лучи суть l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. Будем считать, что $n(l_1) = n(l_2) = 1, n(l_3) = 2, n(l_4) = n(l_5) = 3$. Применем Теорему 1.1 к последовательности $(1, 2, 3, 4, 5, 3, 2, 1, 3, 5, 4, 3)$, прямым $l'_1, l'_2, l'_3, l'_4, l'_5$ и точке $A_1 \in l_1$. Имеем $\{n(l_1), n(l_2)\} = \{1\} \in M_2; \{n(l_2), n(l_3)\} = \{1, 2\} \in M_1; \{n(l_3), n(l_4)\} = \{2, 3\} \in M_2; \{n(l_4), n(l_5)\} = \{3\} \in M_1; \{n(l_5), n(l_3)\} = \{2, 3\} \in M_2; \{n(l_3), n(l_2)\} = \{1, 2\} \in M_1; \{n(l_2), n(l_1)\} = \{1\} \in M_2; \{n(l_1), n(l_3)\} = \{1, 2\} \in M_1; \{n(l_3), n(l_5)\} = \{2, 3\} \in M_2; \{n(l_5), n(l_4)\} = \{3\} \in M_1; \{n(l_4), n(l_3)\} = \{2, 3\} \in M_2; \{n(l_3), n(l_1)\} = \{1, 2\} \in M_1$. Следовательно все точки лежат на лучах l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. QED

4. *В одной четверти находится два луча, а в оставшихся по одному лучу.* Пусть эти лучи суть l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. Будем считать, что $n(l_1) = n(l_2) = 1, n(l_3) = 2, n(l_4) = 3, n(l_5) = 4$. Применем Теорему 1.1 к последовательности $(5, 1, 2, 5, 4, 3, 1, 2, 3, 4)$, прямым l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 и точке $A_1 \in l_5$. Имеем: $\{n(l_5), n(l_1)\} = \{1, 4\} \in M_2; \{n(l_1), n(l_2)\} = \{1\} \in M_1; \{n(l_2), n(l_5)\} = \{1, 4\} \in M_2; \{n(l_5), n(l_4)\} = \{3, 4\} \in M_1; \{n(l_4), n(l_3)\} = \{2, 3\} \in M_2; \{n(l_3), n(l_1)\} = \{1, 2\} \in M_1; \{n(l_1), n(l_2)\} = \{1\} \in M_2; \{n(l_2), n(l_3)\} = \{1, 2\} \in M_1; \{n(l_3), n(l_4)\} = \{2, 3\} \in M_2; \{n(l_4), n(l_5)\} = \{3, 4\} \in M_1;$. Следовательно все точки лежат на лучах l_1, l_2, l_3, l_4, l_5. QED

$\square$

Список литературы

[1] Бляшке В. (Blaschke W.) Введение в геометрию тканей, М.: Г И Ф М Л Ч 1959.- 144 с.

[2] Олимпиада им. Шарыгина, 2006 год, 10 класс, задача 1.

[3] Гильберт, Кон-Фоссен, Наглядная геометрия.

Василий Болбачан, СУНЦ МГУ
e-mail: ys93@bk.ru