Об изогональных прямых треугольника

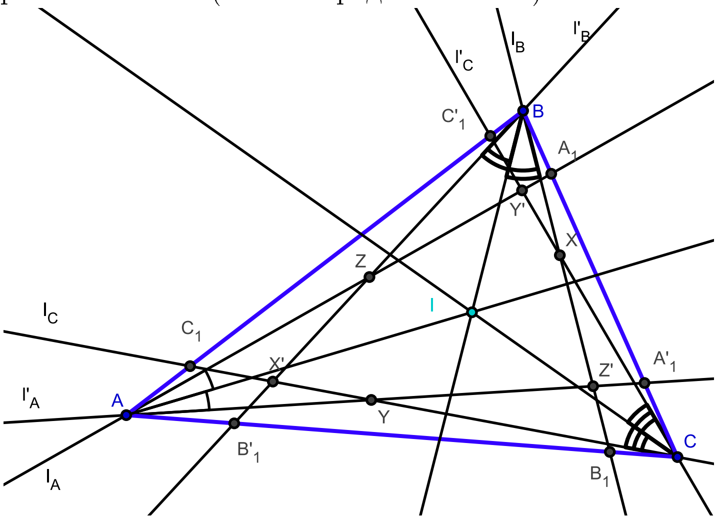
Долгирев Павел

Аннотация. В этой статье рассмотрены и изучены свойства изогональных прямых в треугольнике. Полученные результаты тесно связаны с теоремой Кипера и теоремой о втором центре Морлея (см. §3). Большинство результатов доказаны геометрически.

Введение и основные результаты

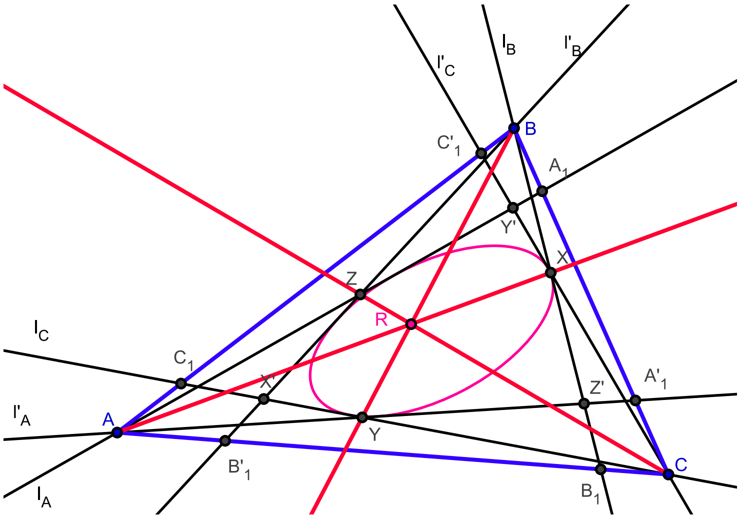
Введем необходимые обозначения:

В треугольнике ABC проведены прямые l_A, l_B и l_C, проходящие через вершины A, B и C соответственно. Прямые l'_A, l'_B и l'_C симметричны l_A, l_B и l_C относительно биссектрис соответствующих углов $\triangle ABC$[1]. Пусть X, Y и Z — пересечения l_B и l'_C, l_C и l'_A, l_A и l'_B, а X', Y' и Z'– пересечения l'_B и l_C, l'_C и l_A, l'_A и l_B. Точки A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1 и C'_1 получены пересечением прямых l_A, l'_A, l_B, l'_B и l_C, l'_C с соответствующими сторонами $\triangle ABC$ (или их продолжениями).



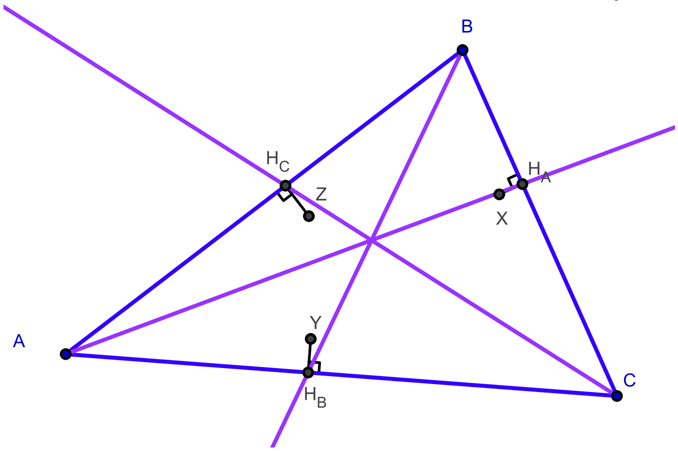
Теорема 1. *Прямые AX, BY и CZ пересекаются в одной точке (дальше R).*

[1]Прямые l_A и l'_A называются изогональными.



Следствие. *Прямые l_A, l'_A, l_B, l'_B, l_C и l'_C касаются одной коники.*

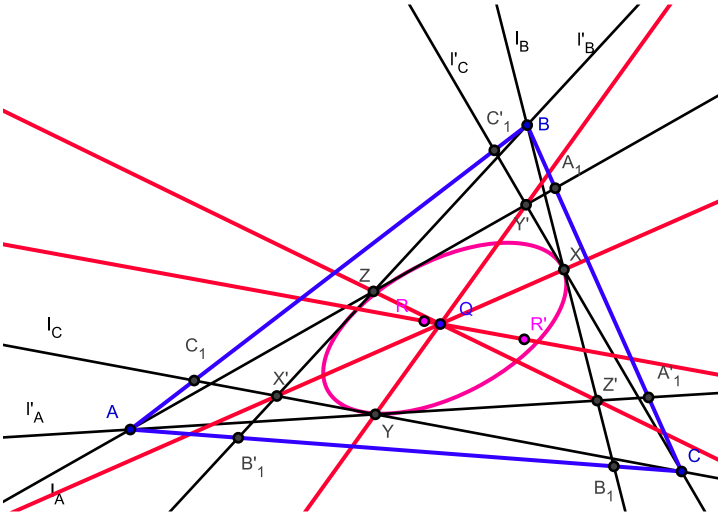
Теорема 2. *Проведем перпендикуляры XH_A, YH_B и ZH_C к соответствующим сторонам $\triangle ABC$. Тогда AH_A,BH_B и CH_C конкурентны.*



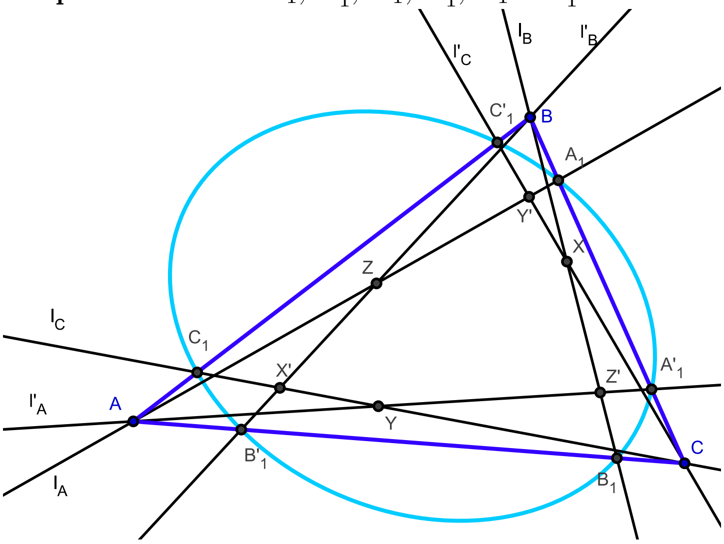
Комментарий. Точки H'_A, H'_B и H'_C определены также как и точки H_A, H_B и H_C. Из критерия конконичности (см. §2), теоремы Чевы и теоремы 2 следует, что точки H_A, H_B, H_C, H'_A, H'_B и H'_C лежат на конике.

Понятно, что AX',BY' и CZ' тоже пересекаются в одной точке (пусть в R'). Из определения изогонального сопряжения следует, что X' — сопряжена с X, Y' — сопряжена с Y, а Z' — с Z', то есть прямая AX' симметрична прямой AX относительно биссектрисы $\angle A$. Значит, R' изогонально сопряжена R.

Теорема 3. *XX', YY', ZZ' и RR' пересекаются в некоторой точке.*



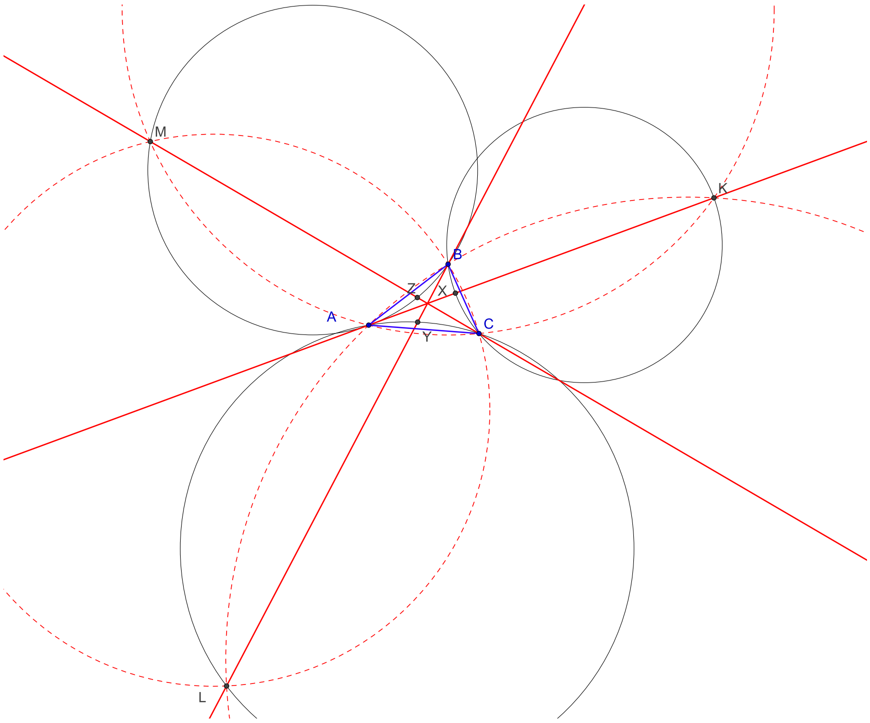
Теорема 4. *Точки A_1, A_1', B_1, B_1', C_1 и C_1' лежат на одной конике.*



Также обратите внимание на §3 и §4, так как там исследованы подобные результаты.

Доказательства, обобщения и следствия

Доказательство теоремы 1. Построим три окружности: $\omega(\triangle XBC)$, $\omega(\triangle YAC)$ и $\omega(\triangle ZAB)$. Пусть AX вторично пересекает окружность $\omega(\triangle XBC)$ в точке K. Аналогично определены точки L (для BY) и M (для CZ).



Запишем равенство вписанных углов:
$\angle CMB = \angle ZAB$ $\angle YAC = \angle BLC$
Из построения (симметрия между прямыми l_A и l'_A) следует:

$$\angle CMB = \angle ZAB = \angle YAC = \angle BLC$$

То есть M, L, B и C лежат на одной окружности[2]. Обозначим эту окружность ω_x. Так же определим ω_y и ω_z. Ясно, что AX, BY и CZ - их радикальные оси, то есть они пересекаются в радикальном центре — R.$\triangleleft$

Доказательство следствия. Зафиксируем прямые l_A, l_B, l_C, l'_A, l'_B и рассмотрим касающуюся их конику (считаем, что прямые общего положения, тогда такая коника единственна). Так как эта коника вписана в $\angle ZAZ'$ и в $\angle XBX'$, то ее фокусы изогонально сопряжены относительно $\triangle ABC$[3] . Следовательно, касательные из C тоже будут изогональными прямыми.$\triangleleft$

Утверждение. Зафиксируем треугольник ABC и конику. Касательные прямые d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C и d'_C, проведенные через соответствующие вершины A, B and C, к конике образуют шестиугольник $XY'ZX'YZ'$

[2]Это формула верна только для этого рисунка (понятно, что расположение прямых может быть очень разнообразным), однако, во всех остальных случаях будем анологично показывать, что точки M, L, B и C лежат на одной окружности (ориентированными углами).

[3]Здесь использовано изогональное свойство коник - [1]

(аналогично, как и в обозначении). Тогда прямые AX, BY, CZ конкурентны. Это утверждение просто следствие из теоремы Брианшиона[4], записанной в этом порядке: d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C, d'_C.

Доказательство теоремы 2.

$$\frac{XH_A}{BH_A} = |tg(\angle(BX, BC))| \Rightarrow \frac{BH_A}{CH_A} = \frac{|tg(\angle(XC, BC))|}{|tg(\angle(BX, BC))|}.$$

Аналогично получаем, что

$$\frac{CH_B}{AH_B} = \frac{|tg(\angle(YA, AC))|}{|tg(\angle(YC, AC))|} = \frac{|tg(\angle(AY, AC))|}{|tg(\angle(XC, BC))|};$$

$$\frac{AH_C}{BH_C} = \frac{|tg(\angle(BZ, AB))|}{|tg(\angle(AZ, AB))|} = \frac{|tg(\angle(BX, BC))|}{|tg(\angle(AY, AC))|} \Rightarrow$$

$$\frac{AH_C}{BH_C} \cdot \frac{BH_A}{CH_A} \cdot \frac{CH_B}{AH_B} = 1 \Rightarrow$$

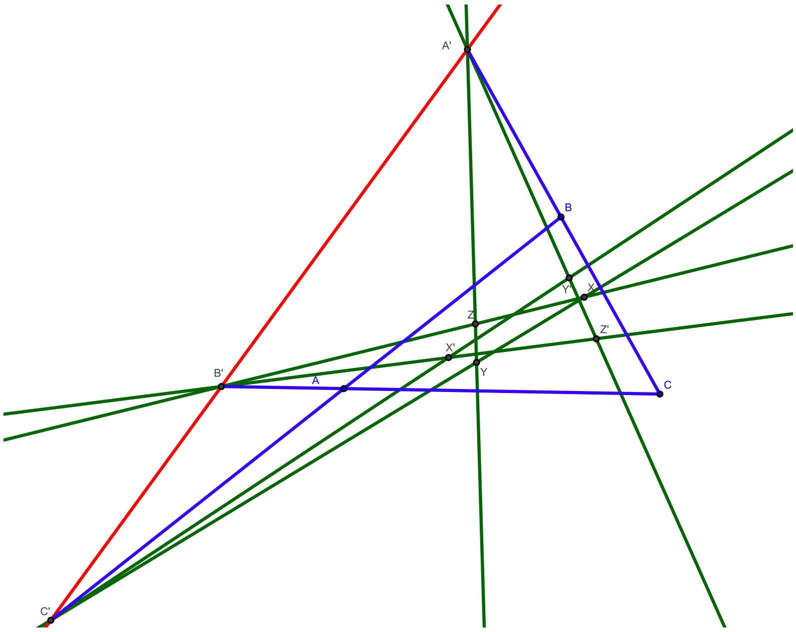
По обратной теореме Чевы следует утверждение теоремы.$\lhd$

Доказательство теоремы 3. Докажем более общее утверждение: Зафиксируем треугольник ABC и конику. Касательные прямые d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C и d'_C, проведенные через соответствующие вершины A, B and C, к конике образуют шестиугольник $XY'ZX'YZ'$. Точки R и R' определены также, как и раньше. Тогда прямые XX', YY', ZZ' и RR' пересекаются в одной точке (пусть в Q).

Чтобы доказать это, докажем следующую лемму:

Лемма. *XY,$X'Y'$ пересекаются в точке C', лежащей на стороне AB.*

[4]Тут использована следующая формулировка этой теоремы: Пусть прямые l_i, $i = 1, ..., 6$, касаются коники, точка $A_{ij}-$ пересечения прямых l_i и l_j. Тогда прямые $A_{12}A_{45}$, $A_{23}A_{56}$ и $A_{34}A_{61}$ пересекаются в одной точке.



Доказательство. Рассмотрим треугольники $X'YB$ и $XY'A$: $X'Y$ пересекается с XY' в точке C; BY пересекается с AX в R, а $X'B$ — с $Y'A$ в Z. Так как C, R и Z лежат на одной прямой, то по обратной теореме Дезарга[5] следует, что AB, XY и $X'Y'$ конкурентны.

Вернемся к доказательству теоремы: так как $\triangle XYZ$ перспективен $\triangle ABC$, то по теореме Дезарга следует, что точки A', B' и C' коллинеарны. Из **леммы** следует, что соответствующие стороны $\triangle XYZ$ пересекаются с соответствующими сторонами $\triangle X'Y'Z'$ в точках, которые лежат на одной прямой. А значит, по обратной теореме Дезарга следует, что $\triangle XYZ$ и $\triangle X'Y'Z'$ перспективны, то есть прямые XX', YY' и ZZ' конкурентны (хотя это утверждение можно было бы доказать, используя теорему Брианшона). Осталось показать, что Q лежит на RR'. Рассмотрим $\triangle RYZ$ и $\triangle R'Y'Z'$: RY пересекается с $R'Y'$ в B, RZ пересекается с $R'Z'$ в C и из **леммы** YZ и $Y'Z'$ пересекаются в A', лежащей на BC. А значит, по обратной теореме Дезарга следует, что $\triangle RYZ$ и $\triangle R'Y'Z'$ перспективны, то есть RR' проходит через Q. Теорема доказана.$\triangleleft$

Доказательство теоремы 4. Утверждение теоремы равносильно обратному, которое можно обобщить так: на соответствующих сторонах $\triangle ABC$ выбраны шесть точек A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1 и C'_1, лежащие на одной конике. Тогда прямые d_A, d'_A, d_B, d'_B, d_C и d'_C касаются одной коники.

Чтобы доказать это утверждение, я воспользовался следующим утверждением (задача 14 из [1]) - критерий конконичности:

---

[5]Теорема Дезарга гласит: прямые A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2, соединяющие соответствующие вершины $\triangle A_1B_1C_1$ и $\triangle A_2B_2C_2$, конкурентны тогда и только тогда, когда точки пересечения прямых A_1B_1 и A_2B_2, B_1C_1 и B_2C_2, C_1A_1 и C_2A_2 лежат на одной прямой.

Пусть на сторонах $\triangle ABC$ лежат шесть точек: A_1, A_2 на стороне BC, B_1, B_2 на стороне AC и C_1, C_2 на AB. Эти шесть точек лежат на одной конике тогда и только тогда, когда

$$\frac{BA_1 \cdot BA_2}{CA_1 \cdot CA_2} \cdot \frac{CB_1 \cdot CB_2}{AB_1 \cdot AB_2} \cdot \frac{AC_1 \cdot AC_2}{BC_1 \cdot BC_2} = 1$$

Пусть K, M, L – пересечения AX с BC, BY с AC, CZ с AB. Из теоремы Чевы:

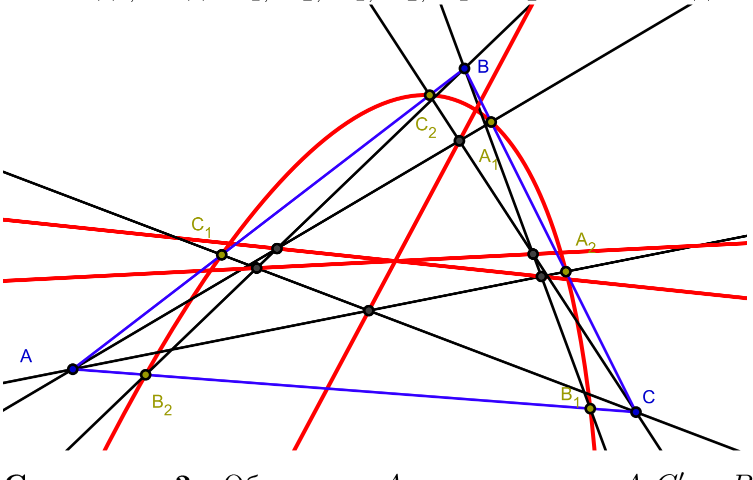
$$\frac{CK}{BK}\frac{BC_1'}{AC_1'}\frac{AB_1}{CB_1} = 1; \frac{AM}{CM}\frac{CA_1'}{BA_1'}\frac{BC_1}{AC_1} = 1; \frac{BL}{AL}\frac{AB_1'}{CB_1'}\frac{CA_1}{BA_1} = 1$$

Перемножим все три равенства и воспользуемся критерием конконичности:

$$\frac{CK}{BK}\frac{AM}{CM}\frac{BL}{AL} = 1$$

По обратной теореме Чевы, следует что AX, BY и CZ конкурентны. Теперь утверждение теоремы становится очевидным – это следствие из теоремы обратной Брианшона или можно рассуждать аналогично как в **теореме 3**.$\triangleleft$

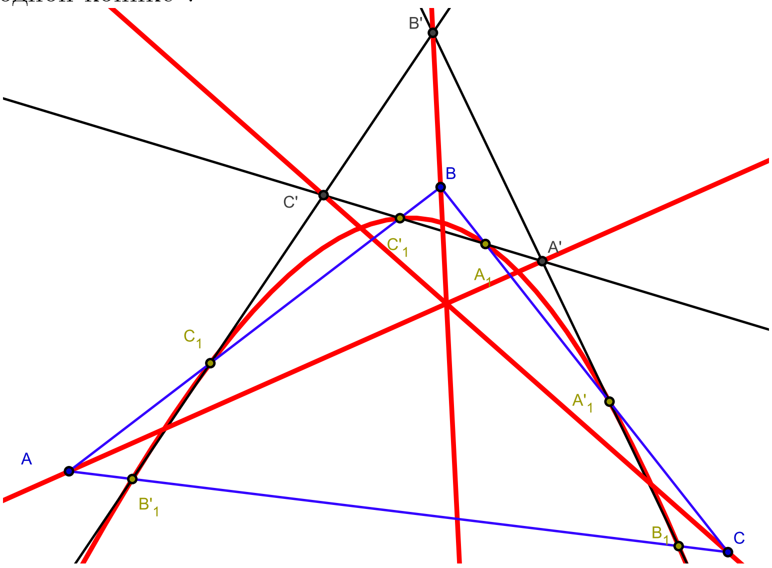
Следствие 1. Обозначим A_2 - пересечение C_1B_1 с $C_1'B_1'$. Аналогично определены точки B_2 и C_2. Из теоремы Паппа[6] следует, что A_2 лежит на прямой XX'. Поэтому следствие из полученных теорем есть следующее: На соответствующих сторонах $\triangle ABC$ выбраны шесть точек A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2. Три прямые Паппы пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 и C_2 лежат на одной конике.



Следствие 2. Обозначим A_3 - пересечение A_1C_1' и B_1A_1'. Также определены B_3 и C_3. Тогда AA_3, BB_3 и CC_3 конкурентны. *Доказательство*:

[6] Точки A_1, B_1, C_1 лежат на прямой l_1, а точки A_2, B_2, C_2 лежат на прямой l_2, то точки пересечения прямых A_1B_2 и A_2B_1, B_1C_2 и B_2C_1, C_1A_2 и C_2A_1 лежат на одной прямой (в дальнейшем, прямая Паппа).

По теореме Паскаля[7] пересечения AB с $A_1'B_1$, BC с $B_1'C_1$ и AC с A_1C_1' лежат на одной прямой. То есть по теореме обратной теореме Дезарга следует, что эти два треугольника перспективны.$\triangleleft$ **Комментарий**: Этот результат, в свою очередь обобщается в следующий: Рассмотрим два треугольника $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$. Обозначим точки C_1 и B_1' пересечения $C'B'$ с AB и AC. Также определены A_1, A_1', B_1, C_1'. Эти два треугольника перспективны тогда и только тогда, когда A_1, A_1', B_1, B_1', C_1 и C_1' лежат на одной конике[8].



Обобщение точек Морлея

Теорема Морлея. Точки пересечения смежных трисектрис углов произвольного треугольника являются вершинами правильного треугольника.

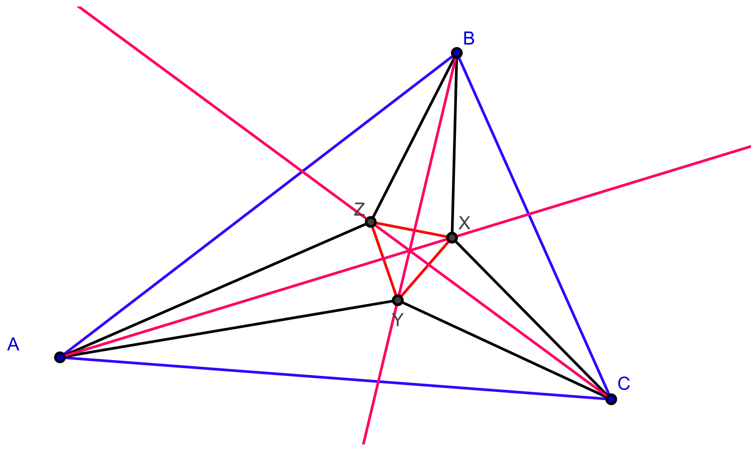
Еще одна теорема утверждает, что эти два треугольника перспективны, а точка пересечения обозначается $2^{nd} MorleyCentre - X(357)$[9].

---

[7]Пусть точки A, B, C, D, E и F лежат на конике. Тогда точки пересечения прямых AB и DE, BC и EF, CD и FA лежат на прямой. Заметим также, что теорема Паппа - это следствие из теоремы Паскаля.

[8]Единственно, непредсказуемый случай, когда один из этих треугольников лежит на сторонах другого. Ведь через три точки проходят бесконечно много коник, а при этом легко добиться того, чтобы соответствующие прямые не пересекались.

[9]Эти обозначения приняты в электронной таблице профессора Кимберлинга, например, ортоцентр - $X(4)$.



Зафиксируем $k \in [-1; 1]$. Будем рассматривать следующую конструкцию: в условиях основной конструкции будем считать, что

$$\frac{\angle A_1AB}{\angle A} = \frac{\angle B_1BC}{\angle B} = \frac{\angle C_1CA}{\angle C} = k.$$

Договоримся считать k положительным, если соответствующие прямые проведены внутренним образом, и отрицательным, если наоборот.

Понятно (из **теоремы 1**), что прямые AX, BY и CZ конкурентны. Будем обозначать точку пересечения $R(k)$. Несложно проверить (например, из теоремы Чевы), что $R(k)$ имеет следующие барицентрические координаты:

$$R(k) = \left(\frac{sin(\angle A) \cdot sin(\angle A \cdot k)}{sin(\angle A \cdot (1-k))} : \frac{sin(\angle B) \cdot sin(\angle B \cdot k)}{sin(\angle B \cdot (1-k))} : \frac{sin(\angle C) \cdot sin(\angle C \cdot k)}{sin(\angle C \cdot (1-k))} \right)$$

Из построения или из этой формулы очевидно, что кривая, описываемая $R(k)$ (также как и кривая, описываеиая R) при изогональном сопряжении переходит сама в себя. То есть эта кривая проходит через $X(358)$ (изогонально сопряженной $2^{nd} Morley Centre$) и инцентр - точку пересечения биссектрис.

Рассмотрим $k = -1 : R(-1) = -\frac{1}{2}(tg\angle A : tg\angle B : tg\angle C) = H$. Так как эта кривая проходит через ортоцентр, то она проходит и через центр описанной окружности O (так как O и H изогонально сопряжены).

Найдем также предельные значения: $k = 0 :$ В этом случае

$$\frac{AL}{BL} = lim_{k \mapsto 0} \frac{sin(\angle B) \cdot sin(\angle A \cdot (1-k)) \cdot sin(\angle B \cdot k)}{sin(\angle A) \cdot sin(\angle B \cdot (1-k)) \cdot sin(\angle A \cdot k)} = \frac{sin(\angle B \cdot k)}{sin(\angle A \cdot k)} = \frac{\angle B}{\angle A}$$

Здесь я воспользовался первым замечательным пределом. То есть

$$R(0) = (\angle A : \angle B : \angle C)$$

Теперь рассмотрим случай, когда $k = 1 :$ Аналогично получаем, что

$$\frac{AL}{BL} = lim_{k \mapsto 1} \frac{sin(\angle B) \cdot sin(\angle A \cdot (1-k)) \cdot sin(\angle B \cdot k)}{sin(\angle A) \cdot sin(\angle B \cdot (1-k)) \cdot sin(\angle A \cdot k)} =$$

$$= \frac{sin^2(\angle B) \cdot sin(\angle A \cdot (1-k))}{sin^2(\angle A) \cdot sin(\angle B \cdot (1-k))} = \frac{sin^2(\angle B) \cdot \angle A}{sin^2(\angle A) \cdot \angle B}$$

Здесь тоже работает первый замечательный предел. То есть

$$R(1) = \left(\frac{sin^2 \angle A}{\angle A} : \frac{sin^2 \angle B}{\angle B} : \frac{sin^2 \angle C}{\angle C} \right)$$

Мы получили также, что $R(0)$ и $R(1)$ изогонально сопряжены.

Очевидно, что все результаты основной конструкции (**теоремы 1-5**) верны и для этого частного случая. Теперь рассмотрим частный случай **теоремы 2**. Будем обозначать точку пересечения $D(k)$. При $k = 1/2$ получается точка Жергона. Легко найти, что

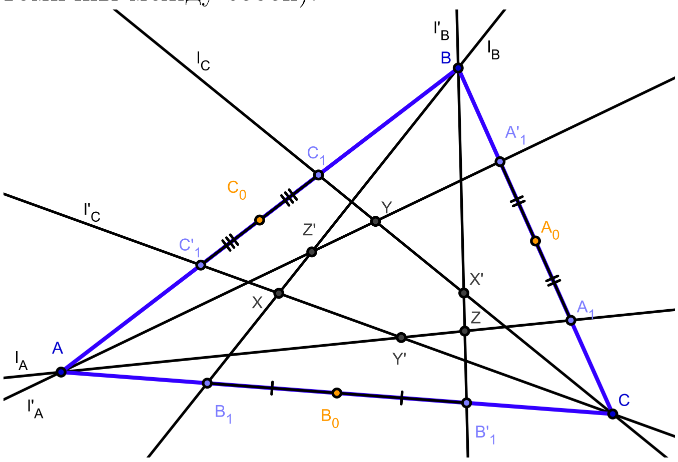
$$D(k) = (tg(\angle A \cdot k) : tg(\angle B \cdot k) : tg(\angle C \cdot k)).$$

При $k = 1$ следует, что $D(1) = H$. Аналогично, как и выше, можно получить, что $D(0) = R(0)$.

Координаты точки $Q(k)$ громоздки, но из геометрического построения становится очевидны ее предельные значения: $Q(0) = R(0)$, а $Q(1) = R(1)$.

Приложение

В основной конструкции l_A и l'_A - изогональные прямые. Будем рассматривать, когда эти прямые изотомические (соответственно l_B и l'_B, l_C и l'_C тоже изотомичны между собой).



Тогда верны следующие утверждения:

1. Прямые l_A, l'_A, l_B, l'_B, l_C и l'_C касаются одной коники. Как следствие AX, BY и CZ пересекаются в P. Соответственно AX', BY' и CZ' пересекаются в P', изотомически сопряженной P.

2. XX', YY', ZZ' и PP' конкурентны.

3. Точки A_1, A'_1, B_1, B'_1, C_1 и C'_1 лежат на одной конике.

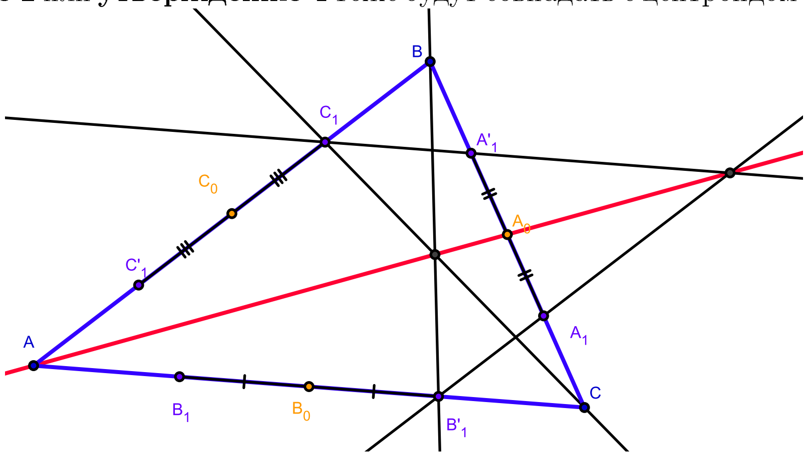
4. Обозначим A_2 - пересечение A_1C_1' и B_1A_1'. Также определены B_2 и C_2. Тогда AA_2, BB_2 и CC_2 конкурентны.

Доказательство: Сделаем аффинное преобразование, переводящее $\triangle ABC$ в правильный. При этом точки A_0, B_0 и C_0 перейдут в середины нового треугольника (так как аффинные преобразования сохраняют отношения параллельных отрезков). Точки A_1, B_1 и C_1 перейдут в новые точки, но они останутся лежать на соответствующих сторонах нового треугольника. В свою очередь точки A_1', B_1' и C_1' перейдут в точки, симметричные A_1, B_1 и C_1 относительно середин соответствующих сторон (опять же, потому что аффинные преобразования сохраняют отношения на прямой). То есть условие теорем можно считать сохранившемся. Так как точки A_1 и A_1' симметричны относительно A_0 и так как треугольник ABC правильный, то $\angle A_1AA_0 = \angle A_1'AA_0$. То есть l_A' симметрична l_A относительно биссектрисы AA_0. Поэтому эту конструкцию мы свели к конструкции, рассматриваемой в **теоремах 1-4**, только для правильного треугольника.$\triangleleft$

Интересный из себя случай представляет, когда отрезки A_1A_1', B_1B_1' и C_1C_1' пропорциональны своим сторонам, то есть

$$\frac{A_1A_1'}{BC} = \frac{B_1B_1'}{AC} = \frac{C_1C_1'}{AB}.$$

Несложно понять (например, из теоремы о четырех точках трапеции или аффинными преобразованиями), что точки P и P' будут совпадать с центроидом треугольника. Также точки пересечения, аналогичные **утверждению 2** или **утверждению 4** тоже будут совпадать с центроидом



треугольника.

Автор благодарен своим научным руководителям: А.А Привалову, А.Г Мякишеву и А.А. Заславскому за полезные советы и обсуждения моей работе.

Литература

[1]А.В.Акопян, А.А.Заславский "Геометрические свойства кривых второго порядка", М, МЦНМО, 2007.