ПОРОЖДЕНИЕ ПЕРЕСТАНОВОК ‘ВОСЬМЕРКОЙ’

И. Григорьев

Наглядная формулировка.

Приведем наглядную формулировку, которая формально не используется в дальнейшем. Рассмотрим такую головоломку: есть два замкнутых желоба, внутри которых в ряд лежат шарики, заполняющие всю длину желоба. Желоба пересекаются так, что ровно один шарик является общим для них обоих. Шарики можно перемещать по кругу вдоль любого из желобов; при этом кольцо из шариков вращается как целое и количество шариков в желобе неизменно. В одном желобе умещается N шариков, во втором K.

рисунок 1

Формулировка.

Циклом $(a_1, a_2, ..., a_n)$ называется взаимно-однозначное отображение множества, содержащего элементы $a_1, a_2, ..., a_n$, в себя, переводящее a_i в a_{i+1} для любого $i < n$, переводящее a_n в a_1, а все остальные элементы - в себя.

Теорема.

Если N или K четно, $N > 1$, $K > 1$,то при помощи циклов $(1, ..., N)$ и $(N, ..., N+K-1)$ можно получить все перестановки $N + K - 1$ - элементного множества.

Если N и K нечетны, $N > 1$, $K > 1$,то при помощи циклов $(1, ..., N)$ и $(N, ..., N+K-1)$ можно получить все четные перестановки и только их.

Перестановку *a можно получить при помощи циклов* $(1, ..., N)$ *и* $(N, ..., N + K - 1)$, если $a = a_1a_2...a_n$, где $a_i = (1, ..., N)$ или $(N, ..., N + K - 1)$.

Данная теорема является фольклорной. В этой работе я самостоятельно доказал ее.

Существует несколько классических теорем, смежных с данной. Вот некоторые из них:

• Любая перестановка представима в виде композиции непересекающихся циклов.

• Существуют две перестановки, при помощи которых которых можно получить любую перестановку n-элементного множества.

• Перестановка четна тогда и только тогда, когда ее можно представить в виде композиции четного числа транспозиций.

Дадим следующее определение четности перестановки: *любая четная перестановка представима в виде композиции циклов длины 3.*

Доказательство Теоремы. Если N и K нечетны, то получить нечетную перестановку нельзя, т. к. умножение на f и g не изменяет четность.
Для доказательства порождаемости достаточно показать, что *при любых N и K любой цикл длины 3 порождается f и g.* Действительно, тогда порождаются все четные перестановки (т.к. *любая четная перестановка представима в виде композиции циклов длины 3.*).
Если N или K четно, то f или g нечетны, следовательно, порождаются все перестановки.

Лемма 1. *Пусть a и b - произвольные перестановки n-элементного множества. Тогда*

$$aba^{-1} = \begin{pmatrix} a(1) & a(2) & ... & a(n) \\ a(b(1)) & a(b(2)) & ... & a(b(n)) \end{pmatrix}.$$

Иными словами, если $b = \Pi_{j=1}^{q}(i_{j1}, i_{j2}, ..., i_{js_j})$, то
$aba^{-1} = \Pi_{j=1}^{q}(a(i_{j1}), a(i_{j2}), ..., a(i_{js_j}))$. QED

Доказательство порождаемости любого цикла длины 3 при помощи f и g. Обозначим $L := N + K - 1$, $f := (1, ..., N)$ и $g := (N, ..., L)$. Докажем при помощи индукции по $\max\{y - x, z - y\}$, что можно получить любой цикл (x, y, z), где $1 \le x < y < z \le L$.

База. Покажем, как получить цикл вида $(y - 1, y, y + 1)$.

$gf^{-1}g^{-1} = (N + 1, N - 1, ..., 1)$ по лемме 1 для $a = g$, $b = f^{-1}$.

$(N + 1, N - 1, ..., 1)f = (N - 1, N, N + 1)$.

Для любого $M < N$:
$f^{-1}(N - 1, N, N + 1)f = (N - 2, N - 1, N + 1)$ по лемме 1 для

$a = f^{-1}$, $b = (N-1, N, N+1)$.
$g^{-1}(N-2, N-1, N+1)g = (N-2, N-1, N)$ по лемме 1 для $a = g^{-1}$, $b = (N-2, N-1, N+1)$.
$(M-1, M, M+1) = f^{-(N-M+1)}(N-2, N-1, N)f^{N-M+1}$ по лемме 1 для $a = f^{-(N-M+1)}$, $b = (N-2, N-1, N)$.

Для любого $N < M < L$:
$g(N-1, N, N+1)g^{-1} = (N-1, N+1, N+2)$ по лемме 1 для $a = g$, $b = (N-1, N, N+1)$.
$f(N-2, N-1, N+1)f^{-1} = (N, N+1, N+2)$ по лемме 1 для $a = f$, $b = (N-1, N+1, N+2)$.
$(M-1, M, M+1) = g^{-(M-N+1)}(N, N+1, N+2)g^{M-N+1}$ по лемме 1 для $a = f^{-(N-M+1)}$, $b = (N-2, N-1, N)$.

Переход. Пусть можно получить любой цикл вида (x, y, z). Тогда по лемме 1

$(x, y, z+1) = (z, z+1, z+2)(x, y, z)(z, z+1, z+2)^{-1}$ и

$(x-1, y, z) = (x-2, x-1, x)^{-1}(x, y, z)(x-2, x-1, x)$.QED

литература

1. Калужин Л.А., Сущанский В.И. Преобразования и Перестановки. М.:Наука, 1985.
2. Зубов А.Ю. О представлении подстановок в виде произведений транспозиции и полного цикла. // ФПМ том 15, вып. 1, 2009 (http://mech.math.msu.su/ fpm/ps/k09/k091/k09103.pdf)