Числа Стирлинга

20 лет назад, в седьмом номере «Кванта» за 1991 год, в рубрике «Математические сюрпризы» была опубликована статья Дж.Конвея «Один старый факт и несколько новых». Там на числовых примерах было рассказано о двух чудесах, и автор просил доказать, что они всамделишные. Попробуем с ними разобраться.

Начнем издалека, с алгебры. Возрастающими степенями называют следующие многочлены:

$$x^{\overline{1}} = x,$$

$$x^{\overline{2}} = x(x+1) = x^2 + x,$$

$$x^{\overline{3}} = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x,$$

$$x^{\overline{4}} = \left(x^3 + 3x^2 + 2x\right)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x.$$

Коэффициенты этих многочленов – это и есть числа Стирлинга[1] (рис.1). Коэффициент при k-й степени у

n	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$
1	1					
2	1	1				
3	2	3	1			
4	6	11	6	1		
5	24	50	35	10	1	
6	120	274	225	85	15	1

Рис. 1

n-го многочлена обозначается символом $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Чтобы вычислить пятую возрастающую степень

$$x^{\overline{5}} = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} x^5 + \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} x^1,$$

проще всего бесхитростно раскрыть скобки. Но мы поступим хитрее, заодно получим рекуррентные соотношения:

$$x^{\overline{5}} = \left(\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x^1\right)(x+4) =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} x^5 + \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}\right) x^4 + \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}\right) x^3 +$$

$$+ \left(4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}\right) x^2 + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} x^1,$$

таким образом,

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = 10,$$

$$\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 35, \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 50$$

$$\text{и} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 24.$$

Вообще,

$$\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} = 1, \quad \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} = (n-1)!, \quad \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\text{и} \quad \begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \cdot \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} \quad \text{при } 1 \le k \le n.$$

Теперь – комбинаторика. Количество способов разбить n человек на k хороводов – это в точности число Стирлинга $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ (в хороводе может быть от одного до n человек). Доказать это легко по индукции: база – случай $n = 1$ – совершенно очевидна. А переход тоже несложен: если нужно разбить на k хороводов $n + 1$ человек, то либо первый их них образует отдельный хоровод, и таких способов ровно $\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}$, либо же надо сначала разбить остальных n человек на k хороводов, а затем поставить первого по правую руку от любого из n уже стоящих в хороводах людей.

Теперь начинаются чудеса Дж.Конвея. Выпишем в ряд бесконечную последовательность единиц и обведем в кружок те, номера которых – треугольные числа: 1, $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, $10 + 5 = 15$, … Это – первая строка рисунка 2. Вторая и последующие строки получаются так: числа записываются только под необведенными числами предыдущей строки, каждое число должно равняться сумме чисел, расположенных непосредственно слева и сверху от него (первое число строки равно просто стоящему над ним числу), в кружок обводятся числа, стоящие наискосок влево-вниз от обведенных чисел предыдущей строки. Обведенные в кружок числа – это числа Стирлинга!

Чтобы объяснить это чудо, введем новые обозначения. Наш рисунок 2 разбивается на бесконечное число «треугольных» частей (на рисунке они отделены друг от друга вертикальными прямыми). Занумеруем их. На рисунке 3 изображен четвертый «треугольник». Число, стоящее в n-м треугольнике на пересечении i-й строки

[1] *Точнее, числа Стирлинга первого рода; бывают еще числа Стирлинга второго рода* $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ *– это количество разбиений множества из n элементов на k непустых подмножеств.*

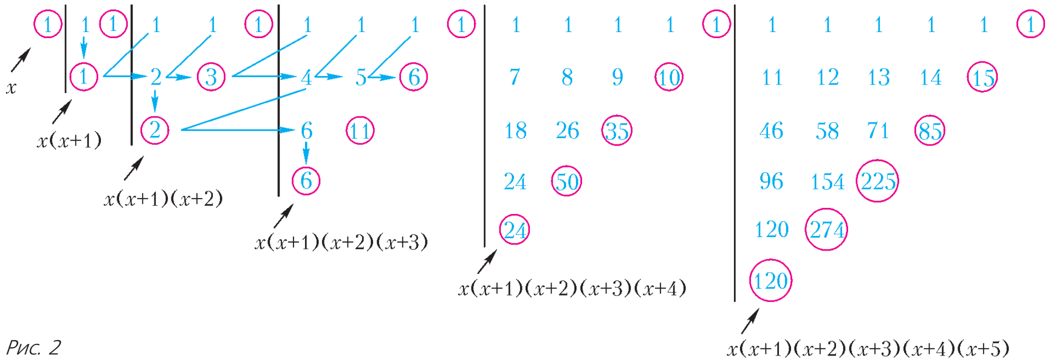

Рис. 2

и j-го столбца, обозначим $\begin{bmatrix} n \\ i,j \end{bmatrix}$ (столбцы треугольника нумеруются слева направо, а строки – снизу вверх). Для удобства обведенные в кружок числа предыдущего треугольника будем считать нулевым столбцом данного. Обозначения, приведенные рядом с четвертым треугольником на рисунке 3, поясняют сказанное. Очевидно,

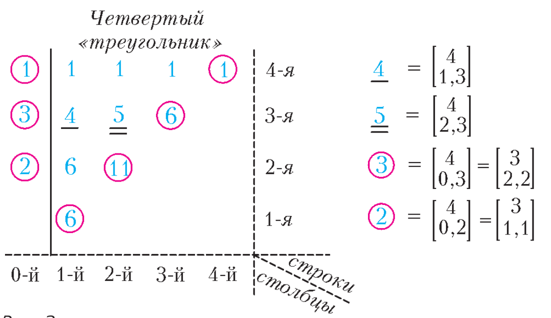

Рис. 3

видно, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k,k \end{bmatrix}$ и $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ 0,n \end{bmatrix}$.

Вся таблица – не только обведенные в кружок числа Стирлинга! – удовлетворяет тому же рекуррентному соотношению, что и сами числа Стирлинга: например,

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 2,4 \end{bmatrix} = 58 = 5\cdot 8 + 18 = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 2,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 1,3 \end{bmatrix}$$

и

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 3,4 \end{bmatrix} = 71 = 5\cdot 9 + 26 = 5\begin{bmatrix} 5 \\ 3,4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 2,3 \end{bmatrix};$$

вообще,

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m,k \end{bmatrix} = n\begin{bmatrix} n \\ m,k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ m-1,k-1 \end{bmatrix}.$$

Есть ли у чисел $\begin{bmatrix} n \\ m,k \end{bmatrix}$ комбинаторный смысл – мы не знаем. Может быть, тут нам помогут читатели?

Теперь – второе чудо. Если обвести не единицы с треугольными номерами, а каждое третье число (рис.4), то в нижней строке получим квадраты натуральных чисел! Более того, как и для чисел Стирлинга, ряды

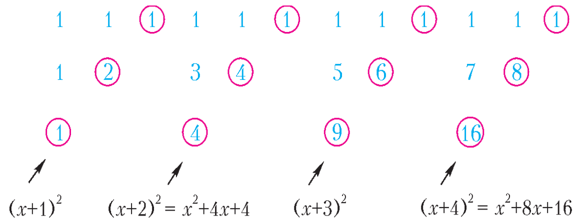

Рис. 4

обведенных кружочками чисел – это коэффициенты многочленов $(x+1)^2$, $(x+2)^2$, $(x+3)^2$, $(x+4)^2$, …

Если обведем каждую четвертую единицу (рис.5), то в нижней строке получим кубы. Соответствующие многочлены – это $(x+1)^3$, $(x+2)^3$, $(x+3)^3$, $(x+4)^3$, …

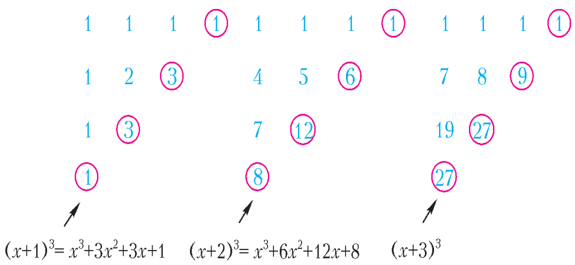

Рис. 5

Аналогичная закономерность верна и при обведении в кружок каждой пятой единицы. Более того, если $n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4 \le \ldots$, то при обведении в кружок единиц с номерами n_1, n_1+n_2, $n_1+n_2+n_3$, $n_1+n_2+n_3+n_4$, … мы получим многочлены, которые замечательным образом разлагаются на множители. Как именно, рассказано в разделе «Ответы, указания, решения» в конце журнала.

А.Волгин (ученик 8 класса), А.Спивак

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

Рисунок 4 показывает, что интересующий нас многочлен при переходе от k-го треугольника к $(k + 1)$-у подвергается двум операциям: замене x на $x + 1$ и домножению на $(x+1)^{n_{k+1}-n_k}$.

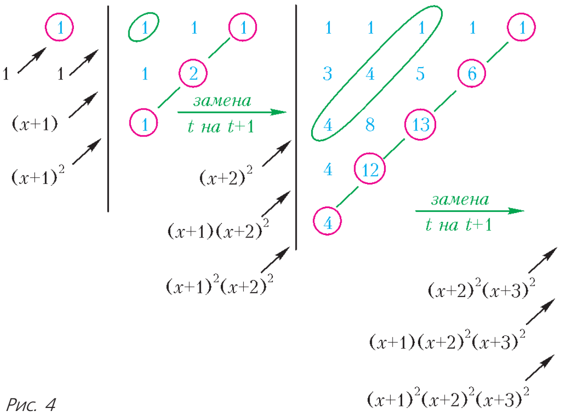

Рис. 4

НЕВОЗМОЖНЫЕ ЗАМОЩЕНИЯ

1. Белых и черных клеток в этой фигуре поровну, но в ее левой половине черных клеток больше, чем белых, а в правой — наоборот (16 против 9 в обоих случаях). Предположим, что замощение доминошками существует. Тогда не более чем одно домино пересекает волнистую линию в середине рисунка 27 статьи, так что левая половина фигурки (кроме, возможно, клетки, примыкающей к волнистой линии) вся замощена доминошками. Поскольку в этой части фигуры черных и белых клеток не поровну, такое невозможно.

4. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 1. Существование замощения при n, сравнимом с 0, 2, 9 или 11 по модулю 12, при $n \le 12$ показывается явной конструкцией, а далее из замощения для $n = 12k$ строится замощение для $n = 12k + l$, где l равно 2, 9, 11 или 12.

Чтобы доказать, что при остальных n замощение невозможно, заметим для начала, что при наличии замощения общее количество точек должно делиться на 3. Значит, $n(n+1)/2 \equiv 0 \pmod 3$, так что n сравнимо с 0 или 2 по модулю 3. Тем самым нам надо рассмотреть случаи, когда остаток от деления n на 12 равен 3, 5, 6, или 8. Граничные слова трехточечных треугольников имеют вид $x^2yx^{-1}yx^{-1}y^{-2}$ и $xy^2x^{-2}y^{-1}xy^{-1}$. Их дублеры на шестиугольной решетке замкнуты. Сопоставим каждому замкнутому ориентированному пути по шестиугольной решетке сумму чисел оборотов вокруг шестиугольных областей. Для граничных путей треугольников эти числа равны ± 1, а для пути вокруг всего треугольника это число равно $[(n+1)/3]$. Стало быть, если в замощении участвуют m треугольников, то $[(n+1)/3] \equiv m \pmod 2$. С другой стороны, $n(n+1)/2 = 3m$, откуда $n(n+1)/2 \equiv m \pmod 2$. Значит, $[(n+1)/3] \equiv n(n+1)/2 \pmod 2$, и легко видеть, что при n, сравнимом с 3, 5, 6 или 8 по модулю 12, это сравнение не выполняется.

5. Будем рассуждать, как в доказательстве теоремы 3. Определим аддитивную функцию f следующим образом: $f(1) = 1$, $f(\sqrt{2}) = -0{,}5$ и $f(x) = 0$, если x не является рациональной линейной комбинацией 1 и $\sqrt{2}$. «Площадью» прямоугольника со сторонами u и v будем называть число $f(u)f(v)$. Тогда «площадь» области на рисунке 28 статьи равна $-0{,}75$, а если бы эту область можно было замостить квадратами, ее «площадь» была бы неотрицательна — противоречие.

КПД ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ЦИКЛОВ

1. $\eta = 1 - \dfrac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$.

2. $\eta = \dfrac{A - \nu RT_1}{A + 1{,}5\nu RT_1} = 29\%$.

3. $\eta' = \dfrac{\eta}{1 + 7\eta} = 7{,}3\%$.

4. $\eta = \dfrac{p_1 - p_2}{5p_1}$.

5. $\eta = 5{,}5\%$. **6.** $\eta = \eta_1 + \eta_2 - \eta_1\eta_2$.

РЕГИОНАЛЬНЫЙ ЭТАП XXXVII ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Нет, неверно.

Подойдет, например, тройка $1/3$, $1/3$, $2/3$.

Замечание. Все такие тройки можно получить, решив соответствующую систему: $a + b^2 + c^2 = a^2 + b + c^2 = a^2 + b^2 + c$. Из первых двух равенств имеем $a^2 - a = b^2 - b$; перенося все в левую часть, получаем $(a-b)(a+b-1) = 0$. Значит, $a = b$ или $b = 1 - a$; аналогичные утверждения верны для остальных пар чисел. Итого, кроме троек из равных чисел, подходят все тройки вида a, a, $1-a$ и только они.

2. Обозначим через Ω и ω описанные окружности треугольников ABC и BDE (рис.5). Положим $\angle ACB = \angle ABC = \alpha$. Четырехугольник $BDAC$ вписан в Ω, значит, $\angle ADB = 180° - \angle ACB = 180° - \alpha$. Углы ADB и EDB – смежные, откуда $\angle EDB = 180° - \angle ADB = 180° - \alpha$. Далее, поскольку четырехугольник $EDFB$ вписан в ω, имеем $\angle EFB = \angle EDB = \alpha$.

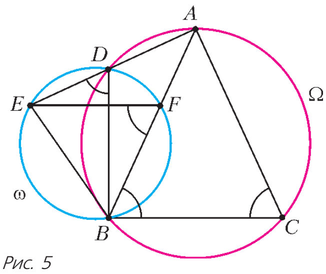

Рис. 5

Итого, $\angle EFB = \angle FBC = \alpha$, а значит, прямые EF и BC параллельны.

3. Проведем пунктиром вертикальные и горизонтальные линии через центры клеток доски. На получившейся пунктирной сетке каждое звено нашей ломаной соединяет узлы, соседние по вертикали, горизонтали или диагонали (рис.6). Поэтому пунктирные прямые

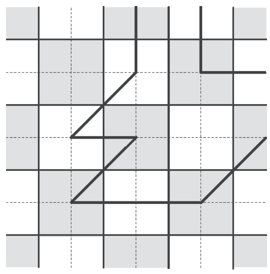

Рис. 6