Числа Стирлинга и Игры Конвея

Волгин А. Д., Спивак А. В.

13.12.2011

1 Введение

В данной статье исследуется интересное наблюдение, сделанное в прошлом (2010) году на лекциях А. В. Спивака. С интервалом в несколько недель, а может и месяцев, он рассказал о двух совершенно различных математических фактах — таблицах Конвея («Квант» 7 выпуск за 1991 год, рубрика «Математические сюрпризы», статья «Один старый факт и несколько новых») и числах Стирлинга и их свойствах.
Вскоре обнаружилось, что по сути таблица чисел Стирлинга и одна из расстановок чисел в кружочках в таблицах Конвея — одно и то же. А примерно через неделю гипотеза, возникшая в результате этого наблюдения, была доказана с помощью рекуррентной формулы для чисел Стирлинга. Используемые в статье факты о числах Стирлинга взяты из книги «Конкретная математика» Р.Грэхема, Д.Кнута и О.Паташника (см. главу 6.1).
Во втором и третьем разделах данной статьи кратко излагаются факты об играх Конвея и числах Стирлинга (см. также «Квант» №2, 2011 год с.32-33). В четвёртом разделе даны определения рассматриваемых понятий, сформулированы теоремы и приведены доказательства.

2 Игры Конвея

В своей статье Конвей предлагает посмотреть на ряд чисел и обвести в кружочек каждое второе, каждое третье или даже каждое «треугольное» число (т.е. числа вида $\frac{n(n+1)}{2} = 1+2+\ldots+n$). После этого под первым рядом выписываются числа таким образом, чтобы каждое следующее число было равно сумме чисел слева и сверху от него. При этом под обведенными в кружочек числами остается пропуск. Получается ряд чисел, разбитый пропусками на группы, после чего каждое число в конце группы также обводится в кружочек. Затем аналогичным образом выписываются третий, четвертый ряд и т. д. В результате получаются следующие представления:

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
1 4 9 16 25 36 49 64 81

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
1 3 7 12 19 27 37 48 61 75 91 108
1 8 27 64 125 216

Можно заметить, что внизу первого представления получаются полные квадраты, а внизу второго — кубы. Если продолжить обводить каждое четвертое число, каждое пятое и так далее, то внизу в кружочках будут получаться числа в 4, 5 степенях и т. д. Кроме того, числа в кружочках по каждой диагонали тоже обладают некоторой закономерностью. Если сверху написать ряд единиц (что мы и сделаем впоследствии), то можно увидеть биноминальные коофициенты для $(x+1)^2$,$(x+2)^2$,$(x+3)^2$, $\ldots$ — в первом случае, и $(x+1)^3$,$(x+2)^3$,$(x+3)^3$, $\ldots$ — во втором.
Что же получится, если обводить каждое треугольное число? Напомним, треугольные числа это 1, $1+2$, $1+2+3\ldots$

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	2		6	11		18	26	35		46	58	71	85	
			6			24	50			96	154	225		
						24				120	274			
										120				

Легко заметить, что числа в кружочках 1, 2, 6, 24, 120 являются факториалами. А что можно сказать об остальных числах в кружочках?

3 Числа Стирлинга

В предыдущей главе мы обратили внимание на то, что в первых двух случаях в кружочках получались биноминальные коэффициенты. В книге «Конкретная математика» 6 глава начинает знакомство читателя с числами Стирлинга, которые названы в ней «близкими родственниками биноминальных коэффициентов».
Итак, эти числа выступают в двух разновидностях, традиционно носящих незатейливые названия «чисел Стирлинга первого и второго рода». *Числом Стирлинга второго рода* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ обозначается число способов разбиения множества из n элементов на k непустых подмножеств (или, если угодно, число способов разложить n разных предметов в k одинаковых мешков так, чтобы ни один из мешков не остался пустым). Для них нетрудно доказать следующую рекуррентную формулу:

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = k \left\{ {n-1 \atop k} \right\} + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}$$

В данной работе нас будут интересовать лишь числа Стирлинга первого рода, поэтому на них мы остановимся более подробно. *Числом Стирлинга первого рода* $\left[{n \atop k} \right]$ обозначается число способов представления n объектов в виде k *циклов* (или число способов посадить n человек с номерами на майках за k одинаковых круглых столов так, чтобы за каждым столом кто-то сидел). Заметим, что нам важен порядок, в котором они расположены, в отличие от чисел второго рода. Исходя из этого, например, можно доказать, что для любых n и k выполняется $\left\{ {n \atop k} \right\} \leq \left[{n \atop k} \right]$
Рассмотрим теперь перестановку, которая переводит 123456789 в 384729156. Для наглядности её можно представить в двух строках:

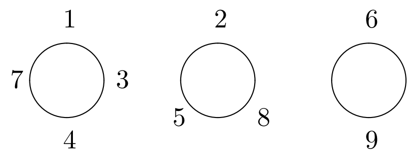
$$1\,2\,3\,4\,5\,6\,7\,8\,9$$

$$3\,8\,4\,7\,2\,9\,1\,5\,6$$

откуда видно, что 1 переходит в 3, 2 переходит в 8 и т. д. Возникает циклическая структура, ибо число 1 переходит в 3, которое переходит в 4, которое переходит в 7, которое переходит обратно в 1, т. е. это цикл $[1, 3, 4, 7]$. Другим циклом в этой перестановке является $[2, 8, 5]$, еще одним — $[6, 9]$. Таким образом, перестановка 384729156 эквивалентна циклическому представлению, состоящем из трех циклов:

$$[1, 3, 4, 7]\,[2, 8, 5]\,[6, 9]$$

Аналогичная этому разбиению рассадка людей за столами:



Теперь выведем рекуррентную формулу для вычисления чисел Стирлинга первого рода. Разделим варианты рассадки n человек за k столов на две группы: I. n-й человек сидит за отдельным столом, II. n-й человек сидит за одним столом еще с кем-либо. Тогда понятно, что количество вариантов группы I будет равно $\left[{n-1 \atop k-1} \right]$. Чтобы рассадить людей II-м способом, нужно сначала рассадить $n-1$ человека за k столов ($\left[{n-1 \atop k} \right]$ вариантов), а затем подсадить к ним n-го человека ($n-1$ вариантов, каждый из которых является способом выбрать его левого соседа). Таким образом, общее количество вариантов будет:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

Используя данную рекурентную формулу легко получить несколько первых чисел Стирлинга:

n	$\begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} n \\ 6 \end{bmatrix}$
0	1						
1	0	1					
2	0	1	1				
3	0	2	3	1			
4	0	6	11	6	1		
5	0	24	50	35	10	1	
6	0	120	274	225	85	15	1

А теперь сравните эту таблицу и числа в кружочках в конце предыдущего раздела.

4 Теоремы о таблицах Конвея

Определение 1. *Построим таблицу Конвея V_n^m, отвечающую $\mathbf{S} \subset \mathbb{N}$, где $m \geq 1$ и $n \geq 1$. Положим $V_n^1 = 1$ для любого n. Для каждого $s \in \mathbf{S}$ выделим V_s^1. Каждая следующая m-я строка получается из предыдущей таким образом (заполнение идёт от $n := 1$; после каждого шага $n := n+1$):*

- *если V_n^{m-1} выделено или $V_n^{m-1} = 0$, то полагаем $V_n^m := 0$,*
- *если V_n^{m-1} не выделено и $V_n^{m-1} \neq 0$, то полагаем*

$V_n^m := V_n^{m-1} + V_q^m$, где q — наибольшее число, меньшее n, для которого $V_q^m \neq 0$; если такого q нет, то полагаем $V_n^m := V_n^{m-1}$.

После заполнения m-й строки выделим в ней все числа, справа от которых ноль.

Рассмотрим множества $l\mathbb{N}$ (множество натуральных чисел, делящихся на n), и $\mathbf{S}_\Delta = \left\{\frac{r(r+1)}{2}; r \in \mathbb{N}\right\}$. Для $3\mathbb{N}$ и $4\mathbb{N}$ таблицы Конвея будут иметь следующий вид (выделенные числа обведены в кружочек; вместо нулей стоят пробелы):

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12
1 4 9 16 25 36

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
1 3 7 12 19 27 37 48 61 75
1 8 27 64 125

Для $\mathbf{S}_\Delta$ таблица Конвея будет такой:

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15
2 6 11 18 26 35 46 58 71 85
6 24 50 96 154 225
24 120 274
120

Заметим, что если V_n^m выделено, то $V_n^{m+1} = 0$, и V_{n-1}^{m+1} либо равно 0, либо выделено. И наоборот, если V_n^m не выделено, то $V_n^{m+1} \neq 0$, и V_{n-1}^{m+1} либо равно 0, либо не выделено. Если $V_n^m = 0$, то V_{n-1}^m либо равно 0, либо выделено, и V_{n-1}^{m+1} тоже равно 0.

Заметим, что в таблице Конвея, отвечающей $l\mathbb{N}$, выделены числа вида V_{lk-d}^{1+d}, при всех $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq l-1$ и только они.

Теорема 1. *В таблице Конвея, отвечающей $l\mathbb{N}$, при $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq l-1$ выполняется следующее соотношение:*

$$V_{lk-d}^{1+d} = k^d \binom{l-1}{d} \tag{1}$$

Определение 2. *Числом Стирлинга первого рода $\left[{n \atop k}\right]$ обозначается число способов представления n объектов в виде k циклов.*

В таблице Конвея, отвечающей $\mathbf{S}_\Delta$, выделены числа вида $V_{r(r+1)/2-d}^{1+d}$, при $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq r-1$ и только они.

Теорема 2. *В таблице Конвея, отвечающей $\mathbf{S}_\Delta$, где $\mathbf{S}_\Delta$ — множество чисел вида $\frac{r(r+1)}{2}$, при $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq d \leq r-1$ выполняется следующее соотношение:*

$$V_{r(r+1)/2-d}^{1+d} = \left[{r \atop r-d}\right] \tag{2}$$

Для доказательства теорем сначала докажем вспомогательные утверждения про многочлены и две леммы.
Рассмотрим произвольный многочлен $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$.

Утверждение 1. *Коэффициент многочлена $A(x+1)$ при i-й степени равен $\sum_{k=i}^{n} \binom{k}{i} a_k$.*

Доказательство.

$$A(x+1) = \sum_{0\leq k\leq n} (x+1)^k a_k = \sum_{0\leq k\leq n} \sum_{0\leq i\leq k} a_k x^i \binom{k}{i} = \sum_{0\leq k\leq i\leq n} a_k x^i \binom{k}{i} = \sum_{0\leq i\leq n} x^i \sum_{i\leq k\leq n} a_k \binom{k}{i} \tag{3}$$

□

Утверждение 2. *Коэффициент многочлена $A(x)(x+1)$ при k-й степени равен $a_k + a_{k-1}$ (полагаем, что $a_{n+1} = a_{-1} = 0$).*

Доказательство.

$$A(x)(x+1) = \sum_{0\leq k\leq n} x^k a_k(x+1) = \sum_{1\leq k\leq n+1} x^k a_k + \sum_{0\leq k\leq n} x^k a_k = a_n x^{n+1} + \sum_{1\leq k\leq n} x^k(a_k + a_{k-1}) + a_0 \tag{4}$$

□

Утверждение 3. *Для чисел Стирлинга существует следующее рекуррентное соотношение:*

$$\left[{n \atop k}\right] = (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right] + \left[{n-1 \atop k-1}\right] \tag{5}$$

Доказательство. В любом представлении n объектов в виде k циклов можно указать объект, который стоит в цикле перед n-м. Если это он сам, то, выбросив цикл, состоящий из n-го элемента, получаем представление $n-1$ объектов в виде $k-1$ циклов, а значит, таких представлений $\left[{n-1 \atop k-1}\right]$. Если же перед n-м в цикле стоит один из оставшихся $n-1$ объектов, то, объединив его с n-м, получаем представление $n-1$ объектов в виде k циклов, а значит, таких представлений $\left[{n-1 \atop k}\right]$. В итоге получаем формулу (5) □

Утверждение 4.

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left[{n \atop k}\right] x^k, \tag{6}$$

где $x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$

Доказательство. Докажем эту формулу по индукции. База индукции — $x^{\overline{1}} = x = \left[{1 \atop 1}\right] x^1$. Индукционный переход:

$$\begin{aligned}
x^{\overline{n}} &= (x+n-1)x^{\overline{n-1}} = (x+n-1)\sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^{k+1} + \sum_{k=1}^{n} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + \sum_{k=1}^{n} (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k = \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^k + (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} x^k \right) = \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k
\end{aligned} \tag{7}$$

□

Определение 3. *Обозначим* $H_n^m(x) = V_m^1 x^n + V_{m-1}^2 x^{n-1} + \ldots + V_{m-n-1}^n x + V_{m-n}^{n+1}$

Лемма 1. *Рассмотрим произвольное выделенное число* V_m^1 *в первой строке таблицы Конвея, отвечающей* $\mathbf{S}$. *Пусть числа* V_m^1, V_{m-1}^2, V_{m-2}^3, $\ldots$, V_{m-n}^{n+1} *не равны нулю, причём множество* $\mathbf{S}$ *и число* n *таковы, что все числа вида* V_{m+d}^1, $1 \le d \le n$, *не выделены. Тогда* $H_n^{m+n+1}(x) = H_n^m(x+1)$.

Доказательство. Докажем по индукции следующую формулу при $1 \le k \le n$:

$$V_{m+1+n-k}^k = \sum_{i=1}^{k} V_{m+1-i}^i \binom{n-i}{n-k} \tag{8}$$

База индукции — $n = 1$: тогда $k = 1$ и

$$\sum_{i=1}^{k} V_{m+1-i}^i \binom{n-i}{n-k} = V_{m+1-1}^1 = V_m^1 = V_{m+1}^1$$

Индукционный переход $n-1 \to n$. Тогда, по предположению индукции для любого $1 \le k \le n-1$ верно

$$V_{m+n-k}^k = \sum_{i=1}^{k} V_{m+1-i}^i \binom{n-1-i}{n-1-k}$$

Для $k = n$ можно проверить правильность формулы (8):

$$V_{m+1}^n = V_{m+1-n}^n + V_{m+1}^{n-1} = V_{m+1-n}^n \binom{0}{0} + \sum_{i=1}^{n-1} V_{m+1-i}^i \binom{n-1-i}{0} = \sum_{i=1}^{n} V_{m+1-i}^i \binom{n-i}{0}$$

Для $k = 1$ формула (8) очевидна. Остаётся проверить её для $2 \le k \le n-1$:

$$V_{m+1+n-k}^k = V_{m+1+n-k}^{k-1} + V_{m+n-k}^k = \sum_{i=1}^{k-1} V_{m+1-i}^i \binom{n-1-i}{n-k} + \sum_{i=1}^{k} V_{m+1-i}^i \binom{n-1-i}{n-1-k} = \sum_{i=1}^{k} V_{m+1-i}^i \binom{n-i}{n-k}$$

Формула (8) доказана.
Многочлен $H_n^{m+n+1}(x)$ представляется как

$$H_n^{m+n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j V_{m+1+j}^{n+1-j} = \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{i=1}^{n+1-j} V_{m+1-i}^i \binom{n-i+1}{j}$$

по формуле (8) $(m+1+j = m+1+(n+1)-(n+1-j))$. Сделав замену $i \to n-i+1$, получаем

$$H_n^{m+n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j \sum_{i=j}^{n} V_{m-n+i}^{n+1-i} \binom{i}{j}$$

Из утверждения 1 следует $H_n^{m+n+1}(x) = H_n^m(x+1)$

□

Заметим, что методом, аналогичным доказательству формулы (8), можно было доказать её обобщение: для всех $k, l \geq 0$, $k + l \leq n$:

$$V_{m+1+l}^{1+k} = \sum_{i=1}^{k+1} V_{m+1-i}^{i} \binom{k+l-i+1}{l} \tag{9}$$

Лемма 2. *Рассмотрим произвольное невыделенное число V_m^1 в первой строке таблицы Конвея, отвечающей $\mathbf{S}$. Пусть числа V_m^1, V_{m-1}^2, V_{m-2}^3, ..., V_{m-n}^{n+1} не равны нулю, а $V_p^{n+2} = 0$ для любого $p < m - n$. Тогда $H_{n+1}^{m+1}(x) = (x+1)H_n^m(x)$.*

Доказательство.

$$V_{m+1}^1 = V_m^1$$

$$V_{m+1-k}^{k+1} = V_{m+1-k}^{k} + V_{m-k}^{k+1}; (1 \leq k \leq n)$$

$$V_{m-n}^{n+2} = V_{m-n}^{n+1}$$

По утверждению 2 это значит, что $H_{n+1}^{m+1}(x) = (x+1)H_n^m(x)$ □

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим таблицу Конвея, отвечающую $l\mathbb{N}$. $H_0^1(x) = 1$; согласно лемме 2,

$$H_{k+1}^{k+2}(x) = (x+1)H_k^{k+1}(x)$$

для $0 \leq k \leq l-2$, откуда

$$H_k^{k+1}(x) = (x+1)^k.$$

Это верно и для $k = l-1$: $H_{l-1}^{l}(x) = (x+1)^{l-1}$. Из леммы 1 следует, что

$$H_{l-1}^{lk}(x) = H_{l-1}^{l(k-1)}(x+1),$$

откуда

$$H_{l-1}^{lk}(x) = (x+k)^{l-1},$$

а его коэффициент при $(l-1-d)$-й степени равен V_{lk-d}^{1+d} по определению 3, и $k^d \binom{l-1}{d}$ по биному Ньютона □

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим таблицу Конвея, отвечающую $\mathbf{S}_\Delta$. Согласно лемме 1, $H_{k-1}^{k(k+1)/2+k}(x) = H_{k-1}^{k(k+1)/2}(x+1)$, а из леммы 2 следует, что $H_k^{(k+2)(k+1)/2}(x) = (x+1)H_{k-1}^{k(k+1)/2+k}(x)$. Учитывая, что $H_{1-1}^{1(1+1)/2}(x) = 1$, получаем

$$H_{k-1}^{k(k+1)/2}(x) = (x+1)^{\overline{k-1}}$$

$$H_{k-1}^{k(k+1)/2+k}(x) = (x+2)^{\overline{k-1}}$$

Коэффициент многочлена $H_{r-1}^{r(r+1)/2}(x)$ при $(r-d-1)$-й степени равен $V_{r(r+1)/2-d}^{1+d}$ по определению 3, и $\begin{bmatrix} r \\ r-d \end{bmatrix}$ из утверждения 4 □

Интересно отметить, что хотя принцип заполнения таблицы Конвея в теоремах и их доказательства похожи друг на друга, результат в них получился совершенно различный. Это объясняется тем, что в первой теореме мы пользовались леммой 2 только вначале, а затем только леммой 1. Во второй же теореме на каждом шагу мы пользовались комбинацией двух лемм.

5 Заключение

В заключение следует сказать несколько слов об авторстве идей, использованных в статье.
В 1991 году в «Кванте» была опубликована статья Конвея про его таблицы. Конвей заметил, что в этих таблицах нижние числа суть степени и факториалы; знал ли он доказательства и обобщения своих наблюдений, автору неизвестно.
В прошлом году Волгин Андрей, ученик 8 класса обнаружил совпадение между таблицей с числами Стирлинга и таблицами Конвея. Он преобразовал эти таблицы таким образом, чтобы они начинались с ряда единиц и доказал, что в случае с треугольными числами в выделенных диагоналях всегда будут получаться числа Стирлинга. Первое доказательство теорем о таблицах Конвея было сделано с использованием следующего рекуррентного соотношения:

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ m+1 \end{bmatrix} = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \binom{k}{m}$$

Эту формулу можно доказать как по индукции, так и комбинаторно. (Доказать, что задача сводится к этому соотношению, можно примерно так же, как мы доказывали лемму 1.) Для чисел сочетаний есть аналогичное соотношение:

$$(k+1)^d \binom{n}{d} = \sum_{i=0}^{d} k^i \binom{n}{i} \binom{n-i}{d-i}$$

Весной был сделан доклад в школе по данной теме. Несколько позже Спивак А. В. привел другое доказательство рассмотренных теорем. Его можно применить не только к рассмотренным частным случаям таблиц Конвея, а также и к другим задачам такого рода. Таким образом, можно в дальнейшем выявить какие-нибудь интересные закономерности для других множеств **S** (другой последовательности выделения единиц в таблице), поэтому в данной статье Волгин Андрей оформил идею именно этого доказательства в более строгий вид.