Окунев А.

10.03.2008

1 Введение

В статье [1] В. И. Арнольд сформулировал следующий вопрос:

Вопрос. *На сколько частей могут делить вещественную проективную плоскость n прямых?*

Основным результатом данной работы является следующее утверждение:

Теорема 1. *Для фиксированного числа n и целого $j > 0$ обозначим через D_j отрезок*

$$\left(j(n+1-j)+\frac{(j-1)(j-2)}{2},(j+1)(n-j)\right) \tag{1}$$

Существует такое число N, что при любом числе $n > N$ и числе $M \in [n, n(n-1)/2+1]$, не принадлежащем ни одному из интервалов D_j, существует конструкция из n прямых на вещественной проективной плоскости, делящих ее на M частей.

В. И. Арнольд доказывает, что при достаточно больших n в списке возможных значений числа частей M появляются стабильные «дыры» (то есть промежутки невозможных значений M), задаваемые этими же формулами

$$D_j = (\beta_{j-1}, \alpha_j) = (j(n+1-j)+(j-1)(j-2)/2, (j+1)(n-j)), j = 1, 2, \dots \tag{2}$$

Точнее, при $n \geq \frac{j(j-1)}{2}$ все значения из отрезка $[\alpha_j, \beta_j]$ реализуемы ([1, Теорема 3]), а при $n > 2(j^2-1)$ ни одно из значений интервала $[\beta_{j-1}, \alpha_j]$ не реализуется ([1, Теорема 5]).

Для доказательства основной теоремы нам потребуется следующее усиление теоремы 3 статьи [1]:

Теорема 2. *Для любого числа прямых n и любого $0 \leq j \leq [\frac{n-1}{2}]$ все значения M из отрезка $[(n-j)(j+1), (n-j)(j+1)+\frac{j(j-1)}{2}]$ реализуемы (причём достаточно конструкций с $k = n-j$).*

В данной работе мы также уточняем некоторые теоремы из указанной статьи В. И. Арнольда и даём ответ на сформулированный им в конце статьи вопрос о том, могут ли 9 прямых делить плоскость на 23 части.

Важной характеристикой расположения прямых оказывается максимальное число прямых, проходящих через одну точку. Как и в статье [1], мы будем обозначать это число через k.

Следующие теоремы уточняют теоремы 4 и 5 статьи [1] соответственно:

Теорема 3. $M \geq \frac{n(n-1)}{k} + 1$.

Теорема 4. *При $n > j(j+1)$ ни одно значение M из интервала D_j не реализуемо.*

2 9 прямых, 23 части

Утверждение 1. *Девять прямых не могут делить проективную плоскость на 23 части.*

Комментарий 1. Это утверждение является прямым следствием теоремы 3, но мы проведём его доказательство напрямую, чтобы продемонстрировать на конкретном примере идеи, полезные и в общем случае.

Доказательство. Допустим, нашлись 9 прямых, которые делят проективную плоскость на 23 части. Пусть k — наибольшее число прямых данного набора, проходящих через одну точку. В случае $k = 2$ прямые находятся в общем положении, и делят плоскость на 37 частей. Следовательно, $k \geq 3$. По теореме 3 статьи [1], число M частей, на которые разбита плоскость должно быть заключено в соответствующем промежутке:

k	MIN	MAX
3	21	36
4	24	34
5	25	31
6	24	27
7	21	22
8	16	16
9	9	9

Таким образом, 9 прямых могут делить плоскость на 23 части только при $k = 3$. Рассмотрим этот случай.

Мы будем повторять доказательство В.И.Арнольда нижней оценки в теореме 3 статьи [1], уточняя часть неравенств. Рассмотрим пучок из трёх прямых a, b и c, проходящих через одну точку O. Прямые этого пучка делят плоскость на три части.

Будем добавлять остальные прямые по одной. Каждая из них увеличивает число частей как минимум на три. Докажем, что не более трёх прямых добавляют ровно три части. Предположим, что это не так. Переставим прямые, добавляющие ровно три части, в начало списка добавляемых прямых (то есть будем добавлять их до всех остальных). Относительный порядок добавления переставляемых в начало списка прямых не изменяем. При этом количество частей, добавляемых каждой из этих прямых, не может увеличиться, а значит, каждая из них будет добавлять ровно три части.

Проведём первую дополнительную прямую l_1. Она не может проходить через точку O, и добавляет ровно три части. Проведём следующую прямую l_2. Эта прямая пересекает прямые a, b и c в различных точках. Чтобы прямая l_2 добавляла ровно три части, точка пересечения прямой l_2 с прямой l_1 должна совпадать с одной из этих трёх точек. Без ограничения общности рассуждений можно считать, что прямые l_1, l_2 и a пересекаются в одной точке. Для упрощения картинки рассмотрим аффинную карту, приняв прямую a за бесконечно удалённую. Видно, что только прямые AC и BD добавляют по 3 части. При этом после проведения одной из них другая будет добавлять уже 4 части. Таким образом, доказано, что может быть не более трёх прямых, добавляющих по 3 части. Следовательно, общее количество частей не менее $3 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 3 = 24 > 23$. $\square$

3 Доказательство теоремы 2

Будем строить реализующие расположения прямых с $k = n - j$. Заметим сначала, что $j \leq [\frac{n-1}{2}] \Leftrightarrow j \leq k - 1$.

Рассмотрим сначала набор из k прямых, проходящих через точку P и j прямых общего положения. Прямые этого набора делят плоскость на $M = k(j+1) + \frac{j(j-1)}{2}$ частей. Для удобства записи выберем аффинную карту, в которой одна из прямых нашего набора, проходящая через точку P — бесконечно удалённая.

Будем теперь менять расположение прямых, каждый раз уменьшая число частей плоскости на 1. На первом этапе выделим из j прямых общего положения две и передвинем их так, чтобы их точка пересечения T попала на одну из k прямых, проходящих через точку P. В результате получим набор, для которого M на 1 меньше, чем у исходного.

Далее на каждом этапе будем брать очередную прямую, из тех, что изначально были в общем положении. На первом шаге этого этапа проведём её через одну из точек пересечения прямых, проходящих через T и P (но не через точки T и P), потом через ещё одну (пошевелив одну из «свободных» прямых, проходящих через T), и т. д. до t-го шага, где t — номер этапа, то есть число уже «обработанных». На последнем шаге проведём выбранную прямую через T (при этом M не изменится).

В результате после нескольких этапов мы получим расположение прямых, в котором k прямых проходят через точку P и $j+1$ прямая проходит через точку T (при этом прямая PT проведена). Очевидно, для такой конструкции $M = k(j+1)$. Поскольку $j \leq k - 1$, во всех получающихся конфигурациях максимальное число прямых, проходящих через одну точку, равно k.

Таким образом, все значения M из промежутка $[(n-j)(j+1), (n-j)(j+1)+\frac{j(j-1)}{2}]$ реализуются, что и требовалось доказать.

4 Доказательство теорем 3 и 4

Доказательство теоремы 3. Мы будем повторять рассуждения В. И. Арнольда, уточняя некоторые оценки.

Занумеруем прямые. Как и в статье [1], *событием* будем называть пересечение какой-либо прямой с прямой с меньшим номером, а *разделением* — деление какой-либо прямой на части прямыми с меньшими номерами.

Пусть s — число событий, а r — число разделений. Рассмотрим какую-то точку пересечения заданных прямых T. Пусть d — её степень. Каждая пара прямых, пересекающихся в этой точке, порождает одно событие, откуда в ней происходит $s(T)=\frac{d(d-1)}{2}$ событий. Каждая из d прямых, проходящих через T (кроме той из них, номер которой минимален), порождает одно разделение, следовательно в T содержится $r(T)=d-1$ разделений.

Следовательно, $s(T)=\frac{r(T)d}{2}\leq\frac{r(T)k}{2}$. Складывая по точкам, получим $s\leq\frac{(r-1)k}{2}$ (добавлено формальное разделение первой прямой, соответствующее единственной исходной части плоскости), откуда $r\geq\frac{2s}{k}+1$. Заметим теперь, что $r=M$. Действительно, пусть x_i — число разделений i-й прямой. Добавляя прямые по одной (в соответствии с нумерацией), мы каждый раз увеличиваем число частей на x_i, откуда $M=\sum x_i=r$. Далее, $s=0+1+\cdots+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$. Следовательно, $M\geq\frac{n(n-1)}{k}+1$. □

Доказательство теоремы 4 получается из доказательства теоремы 5 статьи [1] применением теоремы 3 вместо теоремы 4 статьи [1].

5 Доказательство основной теоремы

Отметим сначала следующее следствие теоремы 2:

Лемма 1. *Все*

$$n+1\leq M\leq\frac{3n^2-2n}{8},$$

не принадлежащие ни одному из интервалов D_j, реализуемы.

Доказательство. Для доказательства этого следствия достаточно заметить, что отрезки из теоремы 2 — в точности отрезки между соседними интервалами D_j и

$$(j_{\max}+1)(n-j_{\max})+\frac{j_{\max}(j_{\max}-1)}{2}=$$
$$=\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\right)\left(n-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)+\frac{\left[\frac{n-1}{2}\right]\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]-1\right)}{2}\geq\frac{3n^2-2n}{8}.$$

□

Таким образом, осталось доказать, что при достаточно большом числе прямых все значения $M > \frac{3n^2-2n}{8}$ реализуемы. Обозначим через $l(n)$ наибольшее число частей на отрезке $[0; \frac{n(n-1)}{2}+1]$, на которое n прямых *не могут* делить плоскость.

Очевидно, для доказательства основной теоремы достаточно доказать следующее утверждение:

Лемма 2. *$l(n) < \sqrt{2n^3} + O(n^{5/4})$ при $n \to \infty$.*

Нам понадобится следующее определение:

Определение 1. Назовём *дефектом* расположения прямых разность $\frac{n(n-1)}{2} + 1 - M$ наибольшего числа частей, на которые могут делить плоскость n прямых, и числа частей, на которые делят плоскость данные n прямых. Обозначение: δ.

Другими словами, дефект конструкции — это число частей, которые «появляются», если пошевелить прямые данного набора.

Обозначим через $\delta_{max}(n)$ наибольшее возможное значение дефекта:

$$\delta_{max} = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Назовём пару (n, δ) *реализуемой*, если существует расположение n прямых с дефектом δ. Обозначим через $d(n) = \frac{n(n-1)}{2} + 1 - l(n)$ наименьший нереализуемый дефект.

Докажем сначала несколько простых технических утверждений:

Лемма 3. *Если пары (n_1, δ_1) и (n_2, δ_2) реализуемы, то пара $(n_1+n_2, \delta_1+\delta_2)$ тоже реализуема.*

Доказательство. Рассмотрим конструкции, реализующие пары (n_1, δ_1) и (n_2, δ_2) и расположим их на проективной плоскости так, чтобы прямые разных наборов находились в общем положении относительно друг друга. Дефект полученной конструкции равен $\delta_1 + \delta_2$. □

Лемма 4. *Разность между соседними реализуемыми дефектами не превосходит $n-2$.*

Рассмотрим конструкцию, реализующую больший из соседних реализуемых дефектов. Пошевелив в ней одну прямую не общего положения, мы уменьшим дефект, но не более, чем на $n-2$. Отсюда следует утверждение леммы.

Лемма 5. *Если $d(m) \geq n$, то*

$$d(m+n) \geq \delta_{max}(n) + d(m) = \frac{n(n-1)}{2} + d(m). \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\delta_1 < \delta_{max}(n) + d(m)$. Обозначим через δ_2 наибольший дефект, не превосходящий δ_1, для которого пара (n, δ_2) реализуема. Заметим, что $\delta_1 - \delta_2 < d(m)$. Действительно, при $\delta_1 \geq \delta_{max}(n)$ это следует из условия $\delta_1 < \delta_{max}(n) + d(m)$, а при $\delta_1 < \delta_{max}(n)$ — из леммы 4 и условия $d(m) \geq n$. Следовательно, пара $(m, \delta_1 - \delta_2)$ реализуема. По лемме 3, пара $(m + n, \delta_1)$ реализуема. □

Доказательство леммы 2. Заметим сначала, что $d(n) > \left[\frac{n-1}{2}\right]$. Действительно, конструкции для дефектов от 0 до $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ получаются из n прямых общего положения «запараллеливанием» (в аффинной карте, для которой бесконечно удалённой является одна из прямых набора) соответствующего количества пар прямых.

Подставляя теперь $m = 2n + 1$ в неравенство (3), получаем $d(3n + 1) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} > \frac{n^2}{2} + O(n)$. Следовательно (в силу монотонности функции d) получаем $d(n) > \frac{n^2}{18} + O(n)$.

Подставляя теперь в то же неравенство $m = \sqrt{18n} + O(1)$, $n > d(m)$, получаем $d(n + \sqrt{18n} + O(1)) \geq \frac{n^2}{2} + O(n)$, откуда $d(n) \geq \frac{n^2}{2} + O(n\sqrt{n})$.

Перепишем теперь неравенство (3) в терминах $l(n)$:

$$\frac{(m+n)(m+n-1)}{2} + 1 - l(m+n) \geq \frac{(n-1)(n-2)}{2} + \frac{m(m-1)}{2} + 1 - l(m)$$

$$l(m+n) \leq \frac{m^2 + 2mn + n^2 - m - n - n^2 + 3n - 2 - m^2 + m}{2} + l(m)$$

$$l(m+n) \leq mn + n - 1 + l(m)$$

Подставим в полученное неравенство $m = \sqrt{2n} + O(\sqrt[4]{n})$, $n < d(m)$:

$$l(m+n) \leq n\sqrt{2n} + O(n^{5/4}).$$

Несложно видеть, что при таком выборе m и n в качестве суммы $m + n$ можно получить любое достаточно большое натуральное число.

Учитывая $m + n > n$, получаем $l(n) \leq \sqrt{2}n^{1.5} + O(n^{5/4})$. □

Таким образом, лемма 2 доказана, а из неё и леммы 1 следует основная теорема.

Список литературы

[1] В. И. Арнольд, На сколько частей делят плоскость n прямых?, *Математическое просвещение, 3-я серия*, **12** (2008), с. 95–104.