

**А. В. Хачатурян**

Научно-редакционный совет серии:

*В. В. Прасолов, А. Б. Сосинский (гл. ред.),  
А. В. Спивак, В. М. Тихомиров, И. В. Яценко*

---

Серия основана в 1999 году

# **ГЕОМЕТРИЯ ГАЛИЛЕЯ**

**Аннотация**

Планиметрия — наука о свойствах фигур плоскости, инвариантных относительно движений плоскости. Фигуры, которые можно совместить движениями, геометрия считает равными и не различает. Всем известны движения евклидовой планиметрии: параллельный перенос, поворот, осевая симметрия. Если изменить группу движений, например, добавить преобразования подобия, то изменится и геометрия. В определенном смысле любая группа преобразований порождает свою геометрию.

В брошюре рассказывается о геометрии, которую порождают преобразования инерциальных систем отсчёта, знакомые из школьного курса физики. Такую геометрию принято называть геометрией Галилея. В чём-то эта странная геометрия отличается от евклидовой, а в чём-то похожа на неё.

Текст брошюры представляет собой обработку записи лекции, прочитанной автором 30 марта 2002 года на Малом мехмате МГУ для школьников 9—11 классов.

Брошюра рассчитана на широкий круг читателей, интересующихся математикой: школьников старших классов, студентов младших курсов, учителей.

Александр Вячеславович Хачатурян

Геометрия Галилея

(Серия: «Библиотека „Математическое просвещение“»  
М.: МЦНМО, 2005. — 32 с.: ил.

Редактор Е. В. Корицкая

Корректор Т. Л. Коробкова

Техн. редакторы М. Н. Вельтищев, М. Ю. Панов

Лицензия ИД № 01335 от 24/III 2000 года. Подписано в печать 14/XI 2005 года. Формат бумаги 60×88  $\frac{1}{16}$ . Офсетная бумага № 1. Офсетная печать. Физ. печ. л. 2,00. Усл. печ. л. 1,96. Уч.-изд. л. 2,16. Тираж 3000 экз. Заказ .

Брошюра соответствует гигиеническим требованиям к учебным изданиям для общего и начального профессионального образования (заключение государственной санитарно-эпидемиологической службы Российской Федерации № 77.99.02.953.Д.003873.06.04 от 2/VI 2004 года).

Издательство Московского центра непрерывного математического образования.  
119002, Москва, Г-2, Бол. Власьевский пер., 11. Тел. 241 72 85, 241 05 00.

Отпечатано с готовых диапозитивов  
в ФГУП «Производственно-издательский комбинат ВИНТИ».  
140010, г. Люберцы Московской обл., Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554 21 86.

ISBN 5-94057-221-9

© Хачатурян А. В., 2005.  
© МЦНМО, 2005.

На вопрос «Что изучает планиметрия?», как правило, отвечают: свойства геометрических фигур на плоскости. Под *геометрической фигурой* понимают множество точек плоскости, а свойства, оказывающиеся, геометрия изучает не только такие, которые инвариантны относительно определённых преобразований плоскости, называемых *движениями*. Таким образом, понятие движения является одним из центральных в геометрии, поскольку на нём основано понятие равенства фигур: две фигуры геометрия считает *равными*, если существует движение, переводящее одну из них в другую. Движения евклидовой планиметрии (той, что изучается в школе) представлены параллельными переносами, поворотами и осевыми симметриями с последующим параллельным переносом вдоль оси. Других нет. Этот факт называется теоремой Шаля.

Рассмотрим теперь вопрос с другой стороны. Равенство фигур естественно считать отношением эквивалентности, т. е. отношением, наделённым тремя свойствами: *рефлексивностью* (каждая фигура равна самой себе), *симметричностью* (если фигура  $A$  равна фигуре  $B$ , то и фигура  $B$  равна фигуре  $A$ ) и *транзитивностью* (если фигура  $A$  равна фигуре  $B$ , а фигура  $B$ , в свою очередь, равна фигуре  $C$ , то фигура  $A$  равна фигуре  $C$ ). Если считать, что равенство фигур обеспечивается некоторым набором преобразований плоскости (движений), то описанные свойства накладывают определённые условия на этот набор: рефлексивность позволяет выделить движение, переводящее все точки плоскости в себя (тождественное движение), симметричность предполагает вместе с движением, переводящим  $A$  в  $B$ , рассматривать и обратное, переводящее  $B$  в  $A$ , транзитивность велит считать преобразование, полученное последовательным применением движений  $f$  и  $g$ , снова движением. Сформулируем более отчётливо эти требования.

1) Для любых движений  $f$  и  $g$  преобразование, являющееся результатом последовательного применения сначала  $f$ , а затем  $g$ , снова является движением. Оно обозначается  $g \circ f$  и называется *композицией*  $f$  и  $g$ .

2) Преобразование, переводящее все точки плоскости в себя, является движением. Оно называется *тождественным*, обозначается  $id$  и обладает естественным свойством  $f \circ id = id \circ f = f$  для любого движения  $f$ .

3) Для любого движения  $f$  существует *обратное* к нему движение  $f^{-1}$ , такое, что  $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = id$ .

Добавим к этому списку автоматически выполняющееся для преобразований условие ассоциативности:

4) Для любых движений  $f$ ,  $g$  и  $h$  справедливо  $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ .

Если набор движений удовлетворяет свойствам 1)–4), то говорят, что задана *группа* движений. Можно убедиться, что движения евклидовой плоскости образуют группу. Если к ней добавить *гомотетии*\*) и их композиции с евклидовыми движениями, то получится *группа преобразований подобия*. В соответствующей геометрии подобные фигуры (например, подобные треугольники) будут неразличимыми.

Можно пойти ещё дальше и добавить к подобиям так называемые *преобразования сжатия к прямой*. Такая расширенная группа (*группа аффинных преобразований*) вообще не различает треугольники — с её точки зрения все треугольники равны. Равны и все параллелограммы, а вот параллелограмм от трапеции эта геометрия всё-таки отличает.

Таким образом, строение группы движений в некотором смысле определяет геометрию. Такой взгляд на геометрию традиционно связывают с именем немецкого математика Феликса Клейна, высказавшего эту точку зрения в знаменитой лекции 1878 года «Сравнительное рассмотрение новейших геометрических исследований», получившей известность под названием «Эрлангенская программа».

Сейчас мы рассмотрим одну довольно простую группу преобразований и увидим, какая геометрия с ней связана. Эта геометрия редко упоминается в литературе. Видимо, замечательная, ставшая уже давно библиографической редкостью монография [2] является единственной научно-популярной книгой на русском языке на эту тему. Большая часть изложенных здесь результатов заимствована из неё. Итак, рассмотрим

### ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГАЛИЛЕЯ

Пусть на плоскости введены координаты  $(x, y)$ . Преобразования

$$(x, y) \mapsto (x+a, y+bx+c),$$

где  $a, b, c \in \mathbb{R}$ , назовём, следуя [2], *преобразованиями Галилея*. Это название связано с физической аналогией: если  $x$  мыслить как время, а  $y$  — как координату на прямой, то указанное преобразование есть не что иное, как преобразование инерциальной системы отсчёта:  $a$  является величиной сдвига начала отсчёта по времени,  $c$  — величиной сдвига по пространственной координате, а  $b$  — скоростью движения одной системы отсчёта относительно другой. Мы ещё не раз будем обращаться к этой физической модели, отмечая, как в ней выглядят вводимые геометрические объекты и величины.

Будем обозначать указанное преобразование тройкой чисел  $[a, b, c]$ , т. е. запись  $g=[a, b, c]$  будем понимать как

$$g: (x, y) \mapsto (x+a, y+bx+c).$$

\*) Гомотетией с центром  $O$  и коэффициентом  $k$  ( $k \neq 0$ ) называется отображение, при котором образом произвольной точки  $X$  является такая точка  $X_1$ , что  $OX_1 = kOX$ .

Покажем, что данный класс преобразований плоскости образует группу, для чего проверим свойства 1)–3).

Пусть  $f=[a, b, c]$  и  $g=[a', b', c']$ . Тогда  $f$  переводит  $(x, y)$  в  $(x+a, y+bx+c)$ , а применение после этого преобразования  $g$  даёт точку  $(x+a+a', y+bx+c+b'(x+a)+c')$ . Эту точку можно было бы получить из  $(x, y)$  сразу применением  $h=[a+a', b+b', c+c'+b'a]$ . Стало быть,  $h$  и есть  $f \circ g$ , т. е. композиция двух преобразований Галилея снова есть преобразование Галилея.

В качестве  $\text{id}$ , очевидно, годится  $[0, 0, 0]$ , свойство 2) легко проверить. Нетрудно убедиться и в справедливости свойства 3).

1. Докажите, что если  $g=[a, b, c]$ , то обратным к нему преобразованием служит  $g^{-1}=[-a, -b, ba-c]$  \*).

Итак, мы определили группу преобразований, которую будем обозначать  $G$  и называть *группой Галилея*. Уже ясно, во что переходят точки, посмотрим теперь, как движения из  $G$  воздействуют на

### ПРЯМЫЕ

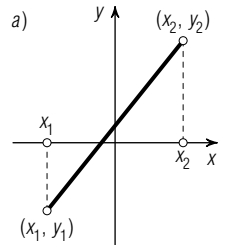
Уравнение невертикальной прямой имеет вид  $y=kx+l$ . Точка  $(x, kx+l)$  такой прямой при преобразовании  $g=[a, b, c]$  переходит в  $(x+a, kx+l+bx+c)$ . Полагая  $x_1=x+a$ , полученную точку можно записать как  $(x_1, (k+b)x_1+l+c-ka-ba)$ , из чего следует, что она лежит на прямой  $y=(k+b)x+(l+c-ka-ba)$ , причём по мере того как  $x$  пробегает  $\mathbb{R}$ ,  $x_1$  также пробегает  $\mathbb{R}$ , т. е. образом прямой  $y=kx+l$  служит прямая  $y=(k+b)x+(l+c-ka-ba)$ . Вертикальная же прямая задаётся уравнением  $x=p$  и переходит, очевидно, снова в вертикальную прямую  $x=p+a$ . Тем самым, вертикальные и невертикальные прямые, неразличимые обычной геометрией, в геометрии Галилея являются разными объектами. Невертикальные прямые будем называть просто *прямыми*, вертикальные — *особыми прямыми*. Нетрудно указать «физическую сущность» этих прямых: обычная прямая представляет из себя график равномерного движения, особая — момент времени.

2. Докажите, что преобразованием из  $G$  данную прямую можно перевести в любую наперёд заданную прямую. Укажите явно элемент  $G$ , переводящий прямую  $y=kx+l$  в прямую  $y=k_1x+l_1$ .

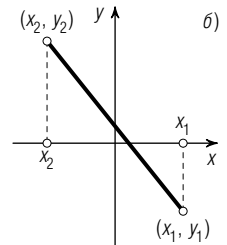
3. Докажите, что параллельные прямые переходят в параллельные. Графиками каких движений служат параллельные прямые?

Нетрудно убедиться, что элементы  $G$  сохраняют порядок точек на прямой (и на особой прямой), а поэтому естественно возникают такие фигуры, как *луч*, *отрезок*, *особый луч*, *особый отрезок*. Нетрудно видеть, что далеко не любые два отрезка можно перевести друг в друга. Это обстоятельство имеет место и в привычной нам

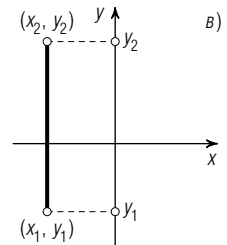
\*) Двумя чертами слева выделены упражнения. Ответы, указания и решения к ним приведены на с. 24–31.



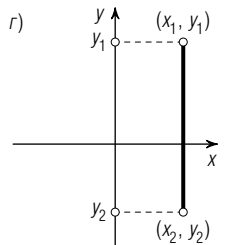
$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_2 - x_1 > 0$$



$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_2 - x_1 < 0$$



$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = y_2 - y_1 > 0, \quad x_1 = x_2$$



$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = y_2 - y_1 < 0, \quad x_1 = x_2$$

Рис. 1

геометрии: движением друг в друга переводятся только равные по длине отрезки. Значит, следует попытаться и в рассматриваемой геометрии определить

### РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

Хотелось бы, чтобы расстояние обладало естественными для него свойствами, в частности, чтобы оно равнялось нулю только в случае совпадения точек и чтобы преобразования из  $G$  сохраняли расстояние. Положим *расстояние* между точками  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$  равным

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = x_2 - x_1$$

(рис. 1, а, б). Однако равенство введённого расстояния между точками нулю ещё не означает их совпадения, а означает всего лишь принадлежность одной особой прямой. В этом случае определим *особое расстояние* (рис. 1, в, г)

$$d_{\text{особ.}}((x_1, y_1), (x_1, y_2)) = y_2 - y_1.$$

Такое определение удовлетворяет первому желаемому свойству: две точки совпадают тогда и только тогда, когда между ними определено особое расстояние, и оно равно нулю. С «физической точки зрения» расстояние — это разница во времени между событиями, а особое расстояние — разница в их координате для одновременно произошедших событий.

4. Докажите, что преобразования из  $G$  сохраняют расстояние и особое расстояние (если последнее определено).

Очень важное отличие от евклидова расстояния в том, что теперь расстояние между точками может быть отрицательным (рис. 1, б, г)!

Теперь рассмотрим множество точек, удалённых от данной точки на определённое расстояние. Каждый знает, что это —

### ОКРУЖНОСТЬ

Совершенно очевидно, что окружность — это попросту особая прямая! На рис. 2 изобра-

жена окружность с центром в точке  $A$  радиуса  $-1$ . «Физическая сущность» окружности, стало быть, такая же, как и у особой прямой: окружность — это момент времени. Наверное, будет разумно с этого момента отказаться от термина «особая прямая», называя этот объект *окружностью*. Особый же отрезок мы, естественно, назовём *дугой*. И несмотря на то, что такая окружность сама по себе фигура довольно примитивная и не сравнимая по богатству геометрических свойств с евклидовой окружностью, дуга окружности поможет нам в важном деле — с её помощью мы сможем измерять

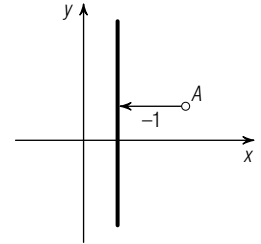


Рис. 2

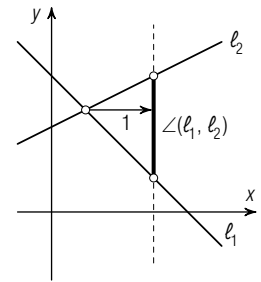


Рис. 3

### УГЛЫ

Как и в евклидовой геометрии, *углом* между пересекающимися прямыми  $l_1$  и  $l_2$  назовём длину дуги, которую они высекают на единичной окружности с центром в точке их пересечения (рис. 3). Подобно расстоянию между точками, величина угла между прямыми зависит от порядка их следования, т. е.

$$\angle(l_1, l_2) = -\angle(l_2, l_1).$$

Про угол  $\angle(l_1, l_2)$  мы будем говорить «угол от прямой  $l_1$  к прямой  $l_2$ », такие углы называют *ориентированными*. Заметим, что величина угла может быть любым действительным числом. Угол между совпадающими или же параллельными прямыми считается равным 0.

5. Докажите, что если прямые  $l_1$  и  $l_2$  заданы уравнениями  $y = k_1x + b_1$  и  $y = k_2x + b_2$  соответственно, то  $\angle(l_1, l_2) = k_2 - k_1$ . Докажите, что преобразования из  $G$  сохраняют углы. Каков физический смысл угла между прямыми?

6. Докажите, что в геометрии Галилея справедлив критерий параллельности прямых: две прямые, пересечённые третьей, параллельны тогда и только тогда, когда эта третья прямая образует с ними одинаковые углы. Верно ли, что две прямые, параллельные третьей, параллельны (разумеется, мы здесь и далее совпадающие прямые тоже считаем параллельными)?

*Перпендикуляром*, опущенным из точки  $A$  на прямую  $l$ , обычно называют прямую, соединяющую  $A$  с ближайшей к ней точкой прямой  $l$ . В нашем случае такой прямой нет, несмотря на то, что ближайшая (в смысле обычного, неособого расстояния) точка существует. Однако роль перпендикуляра может взять на себя особая

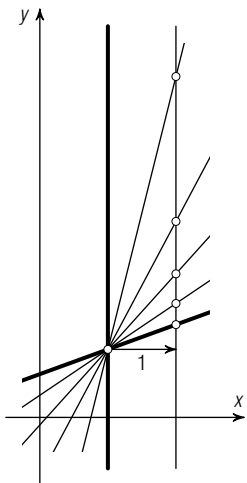


Рис. 4

прямая. Во всяком случае, при таком определении из каждой точки, не лежащей на прямой, можно опустить единственный перпендикуляр на эту прямую, а из точки, лежащей на прямой, — восставить единственный перпендикуляр к ней. В евклидовой планиметрии угол между прямыми не превосходит  $90^\circ$ , достигая максимума в случае перпендикулярности; в геометрии Галилея определённый нами перпендикуляр является предельным положением прямых, пересекающих данную прямую в фиксированной точке при увеличении угла между ней и этими прямыми (рис. 4).

Теперь мы умеем измерять отрезки и углы и можем рассмотреть

### ТРЕУГОЛЬНИКИ

Три точки, не лежащие на одной прямой и три (неособых!) отрезка, соединяющие их, назовём *треугольником*. Попробуем проверить привычные нам свойства треугольника в изучаемой геометрии. Начнём с неравенства треугольника.

Если вершины треугольника  $ABC$  имеют координаты  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$  и  $C(x_c, y_c)$ , то  $AB = x_b - x_a$ ,  $BC = x_c - x_b$ ,  $AC = x_c - x_a$ , откуда  $AB + BC = AC$ . Вместо неравенства треугольника получилось равенство! Этот же факт можно записать и в виде  $AB + BC + CA = 0$  — периметр любого треугольника равен нулю.

А чему равна сумма углов треугольника? Прежде чем вычислить её, условимся записать  $\angle ABC$  понимать как «угол от прямой  $AB$  к прямой  $BC$ » и отличать  $\angle ABC$  от  $\angle CBA = -\angle ABC$ . Пусть угловые коэффициенты прямых  $AB$ ,  $BC$  и  $CA$  равны  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k_3$  соответственно.

Воспользуемся результатом упражнения 5 и получим:

$$\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB = (k_1 - k_2) + (k_2 - k_3) + (k_3 - k_1) = 0.$$

Это ясно и из геометрических соображений (рис. 5).

В школьной геометрии учение о треугольниках базируется на понятии равенства треугольников и признаках равенства. Треугольники мы назовём *равными*, если существует преобразование из группы  $G$ , переводящее один из треугольников в другой.

Покажем справедливость признака равенства по двум сторонам и углу между ними. Пусть даны треугольники  $ABC$  и  $A_1B_1C_1$  такие, что  $AB = A_1B_1$ ,  $AC = A_1C_1$  и  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$ . Рассмотрим преобразование  $[a, b, c]$  из  $G$ , переводящее  $A$  в  $A_1$  и  $C$  в  $C_1$ . Оно существует и единственно. Здесь  $a$  равно разности абсцисс точек  $A$  и  $A_1$  (для точек  $C$  и  $C_1$  оно будет таким же, поскольку  $AC = A_1C_1$ ),  $b$  и  $c$  определяются из системы линейных уравнений, получающихся из-за совпадения ординат точек  $A_1$  и  $C_1$  с ординатами образов  $A$  и  $C$ . Эта система имеет одно решение, поскольку абсциссы точек  $A$  и  $C$  различны. Указанное движение  $[a, b, c]$  переводит также  $B$  в  $B_1$ . В самом деле, из-за равенства  $AB = A_1B_1$  образ  $B$  лежит на одной окружности с  $B_1$ , а из-за равенства  $\angle BAC = \angle B_1A_1C_1$  образ  $B$  лежит на прямой  $A_1B_1$ . образу  $B$  ничего не остаётся, как совпасть с  $B_1$ , тем самым равенство треугольников доказано.

|| 7. Справедливы ли в геометрии Галилея признаки равенства || треугольников по стороне и двум углам? по трём сторонам?

Сказанное ранее о перпендикулярах позволяет без изменений перенести в геометрию Галилея определение *высоты треугольника* (рис. 6). *Биссектрису угла* разумно определить как прямую, делящую угол пополам, понимать же биссектрису треугольника как отрезок неудобно, поскольку она вообще может проходить вне треугольника (рис. 7). Определение *медианы* можно перенести из евклидовой геометрии буквально, благо середина отрезка в обеих геометриях — одна и та же точка, однако при этом приходится смириться с тем, что медиана может быть как отрезком, так и дугой окружности. Зато медианы любого треугольника пересекаются в одной точке и делятся ей в отношении 2:1 — доказательство этого факта без изменений переносится из евклидовой геометрии в геометрию Галилея, этот факт лежит в кругу понятий и фактов, общих для обеих геометрий. Высоты треугольника, конечно, не пересекаются (см. рис. 6), не пересекаются в одной точке и биссектрисы (см. рис. 7).

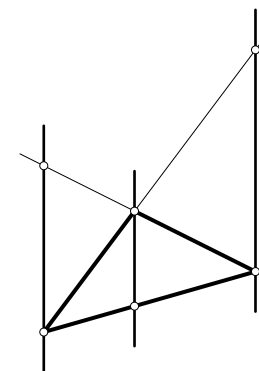


Рис. 6

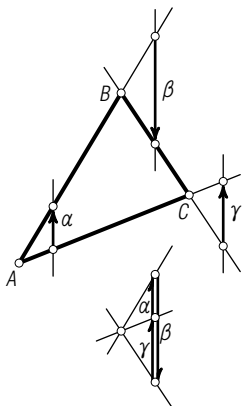


Рис. 5

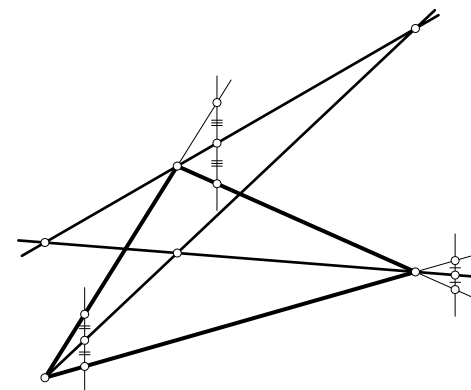


Рис. 7

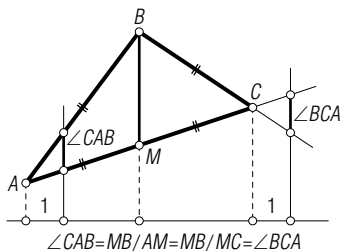


Рис. 8

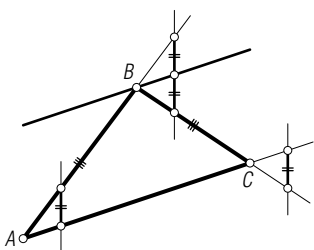


Рис. 9

8. Докажите, что биссектрисы углов треугольника попарно пересекаются, причём точки пересечения служат вершинами треугольника, стороны которого равны сторонам исходного треугольника, а углы вдвое меньше углов исходного (см. рис. 7).

Интересно также рассмотреть *равнобедренный треугольник*, т. е. такой треугольник  $ABC$ , у которого  $AB = BC$  (рис. 8). Его углы при основании равны, так как их величина равна отношению высоты, опущенной на основание, к половине этого основания (равной боковой стороне). У равнобедренного треугольника (и только у него) медиана совпадает с высотой. Однако биссектриса угла при вершине обладает иным свойством.

9. Докажите, что биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию, а для неравнобедренного треугольника это не так (рис. 9).

10. Существуют ли равносторонние треугольники?

11. В любом ли треугольнике справедлива теорема о средней линии?

12. Докажите, что в любом треугольнике  $ABC$  справедлива своеобразная *теорема синусов*:  $\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{BC}{\angle BAC} = \frac{CA}{\angle CBA}$ .

13. Справедлива ли в произвольном разностороннем треугольнике  $ABC$  теорема о биссектрисе: биссектриса угла пересекает противоположную сторону или её продолжение и делит её в отношении, равном отношению сторон, образующих этот угол?

Многими интересными свойствами обладают различные

### ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКИ

Определение четырёхугольника такое же, как в евклидовой планиметрии. Точно так же среди четырёхугольников можно выделить *параллелограммы* — такие четырёхугольники, противоположные стороны которых попарно параллельны (подумайте, почему в отличие от евклидовой геометрии в геометрии Галилея четырёхугольник с попарно равными противоположными сторонами не обязательно является параллелограммом). Неудивительно, что у параллелограммов в геометрии Галилея, так же как и в геометрии Евклида, равны противоположные углы и диагонали точкой

пересечения делятся пополам (рис. 10). Более того, у параллелограммов в геометрии Галилея равны все четыре угла!

14. Докажите, что диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам тогда и только тогда, когда это параллелограмм.

15. Докажите, что противоположные углы четырёхугольника попарно равны тогда и только тогда, когда это параллелограмм.

В евклидовой геометрии ромб определялся как параллелограмм с равными сторонами или же как четырёхугольник с равными сторонами — оба определения были эквивалентными. В геометрии Галилея этими свойствами определяются разные четырёхугольники. Будем называть *ромбом* параллелограмм с равными сторонами, т. е. такой параллелограмм  $ABCD$ , у которого  $AB = BC = AD = DC$  (рис. 11). Четырёхугольник же, не являющийся параллелограммом, но с равными сторонами условимся называть *равносторонником* (рис. 12).

16. Верно ли, что диагонали ромба перпендикулярны и являются биссектрисами его углов? Верны ли эти свойства для произвольного равносторонника?

Ничто не мешает назвать *трапецией* четырёхугольник, две стороны которого параллельны, а две другие — нет (рис. 13). Для трапеции останутся справедливыми её аффинные свойства, например, теорема о средней линии или так называемая «лемма о трапеции»: точка пересечения диагоналей, точка пересечения боковых сторон и середины оснований трапеции лежат на одной прямой (рис. 13). Правда, в изучаемой геометрии такой прямой может оказаться и особая прямая, т. е. окружность.

А вот прямоугольников в геометрии Галилея, строго говоря, нет. И всё же:

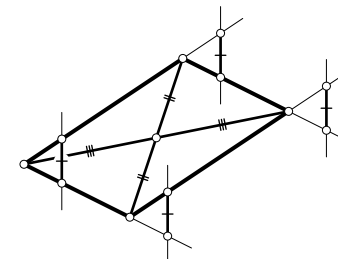


Рис. 10

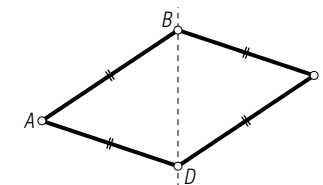


Рис. 11

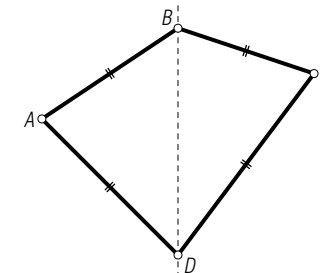


Рис. 12

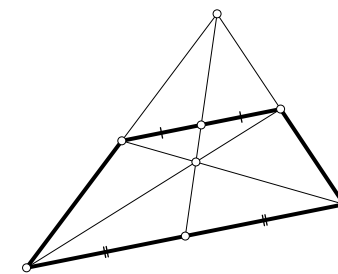


Рис. 13

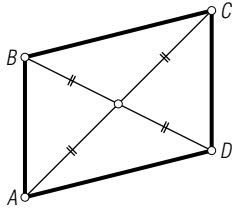


Рис. 14

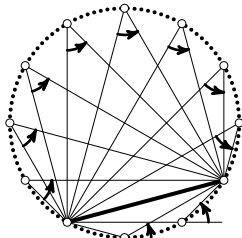


Рис. 15

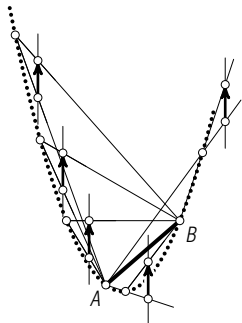


Рис. 16

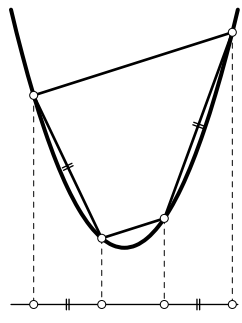


Рис. 17

назовём *прямоугольником* фигуру  $ABCD$ , четыре вершины которой соединены двумя отрезками  $BC$  и  $AD$  и двумя дугами  $AB$  и  $CD$  (рис. 14). Такой прямоугольник не является четырёхугольником, однако его диагонали делятся точкой пересечения пополам и равны по длине.

17. Докажите, что  $ABCD$  — прямоугольник тогда и только тогда, когда  $CD$  — дуга окружности и  $\angle CAD = \angle CBD$ .

Свойство, описанное в этом упражнении — равенство углов, опирающихся на одну дугу, — в евклидовой геометрии играет важную роль, оно выполняется тогда и только тогда, когда вокруг четырёхугольника можно описать окружность. Собственно говоря, окружность можно определять как множество точек, из которых отрезок виден под данным (ориентированным!) углом (рис. 15). Если в геометрии Галилея решить такую же задачу, возникнет новый объект — значительно более похожий по свойствам на евклидову окружность. Поскольку термин «окружность» уже использован, такую кривую называют словом

### ЦИКЛ

Итак, назовём *циклом* множество точек  $M$  плоскости, таких, что  $\angle AMB = \text{const}$ , где  $AB$  — данный отрезок (рис. 16).

Выведем уравнение цикла. Пусть  $A(x_a, y_a)$ ,  $B(x_b, y_b)$ ,  $M(x_m, y_m)$ ,  $\angle AMB = k \neq 0$ . Тогда угловые коэффициенты прямых  $MA$  и  $MB$  равны  $\frac{y_b - y_m}{x_b - x_m}$  и  $\frac{y_a - y_m}{x_a - x_m}$  соответственно, и мы имеем:

$$\frac{y_b - y_m}{x_b - x_m} - \frac{y_a - y_m}{x_a - x_m} = k.$$

Несложными преобразованиями получаем, что

$$y_m = \frac{k}{x_b - x_a} x_m^2 - \frac{kx_a + kx_b + y_a - y_b}{x_b - x_a} x_m + \frac{kx_a x_b + y_a x_b - y_b x_a}{x_b - x_a}.$$

Мы получили квадратный трёхчлен, значит, цикл — это парабола. Её ветви могут быть направлены как вверх, так и вниз.

Выводя уравнение цикла, мы по сути также доказали, что любой график квадратного трёхчлена является циклом, а также что вокруг любого треугольника можно описать цикл, причём единственным образом. В самом деле, пусть дан график квадратного трёхчлена, точки  $A, B, C$  лежат на нём, и  $\angle ACB = k$ . Описывая геометрическое место точек, из которых отрезок  $AB$  виден под углом  $k$ , мы доказали, что это график квадратного трёхчлена. Точки  $A, B, C$  принадлежат ему, однако через три точки плоскости нельзя провести два различных графика квадратных трёхчленов, иначе их разность — многочлен степени не выше второй, не равный тождественно нулю, — будет иметь три различных корня, что невозможно. Пусть теперь  $ABC$  — произвольный треугольник. Тогда решение нашей задачи укажет единственный квадратный трёхчлен, график которого проходит через  $A, B$  и  $C$  — описанный цикл треугольника  $ABC$ .

18. Верно ли, что в цикл можно вписать только равнобедренные трапеции (рис. 17)?

Каков физический смысл цикла? Он хорошо известен из школьного курса физики: цикл — график равноускоренного движения, подобно тому, как прямая — график равномерного. Цикл, описанный вокруг треугольника, можно интерпретировать следующим образом. Допустим, вы выезжаете из Москвы в 10 часов утра и планируете быть в Нижнем Новгороде в 18 часов. Тогда вы всегда можете подобрать нужную скорость и двигаться равномерно, при этом вы в какой-то момент окажетесь во Владимире. Двигаясь равноускоренно, вы сможете осуществлять своё путешествие так, чтобы проезжать Владимир в различные моменты времени. Если же вам нужно быть во Владимире ровно в 15 часов, то существует единственное равноускоренное движение, удовлетворяющее всем этим требованиям (рис. 18).

19. Докажите, что образом цикла при движении является цикл.

У цикла есть много свойств, характерных для евклидовой окружности. Например, существует семейство движений, переводящих цикл в себя (аналогичных евклидовым поворотам). Они называются *сдвигами вдоль цикла*, или *циклическими поворотами*.

20. Докажите, что движения, переводящие цикл  $y = ax^2 + bx + c$  в себя, описываются формулой  $[\lambda, 2a\lambda, b\lambda - a\lambda^2]$ , где  $\lambda$  — произвольное действительное число (аналог угла поворота). Можно ли сдвигом вдоль фиксированного цикла перевести данную точку в любую наперёд заданную?

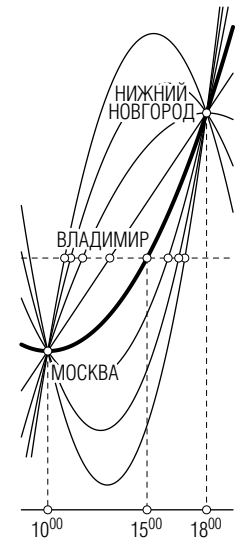


Рис. 18

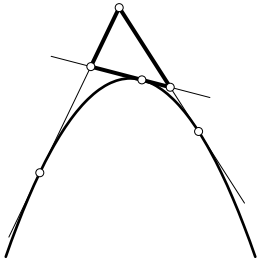


Рис. 19

Говорят, что прямая *касается* цикла, если она имеет с ним ровно одну общую точку. Оказывается, что в любой треугольник можно единственным образом вписать цикл, т. е. расположить его так, чтобы прямые — стороны треугольника — касались цикла (рис. 19). Докажем этот факт. Для этого нам понадобится следующая вспомогательная задача.

**21.** Докажите, что для любого числа  $k$  существует единственная прямая с угловым коэффициентом  $k$ , касающаяся параболы  $y = x^2$ .

Пусть дан произвольный треугольник. Проведём к параболе  $y = x^2$  касательные, параллельные его сторонам. В пересечении эти прямые образуют треугольник, равный или гомотетичный данному. Переведём его в данный сдвигом (именно сдвигом, так как соответствующие стороны параллельны) или гомотетией. При этом парабола  $y = x^2$  перейдёт в искомый цикл. Ясно также, что вписанный цикл единствен: если два цикла вписаны в один треугольник, то они совмещаются либо сдвигом, либо гомотетией. Проведём это преобразование; стороны треугольника сохраняют направление, а свойство «касаться цикла» перейдёт в себя. Тогда треугольник останется на месте, из чего легко вывести, что преобразование было тождественным, а значит, циклы совпадают.

**22.** Докажите, что длины касательных к циклу, проведённых из одной точки, равны по абсолютной величине.

Три точки определяют цикл, три прямые также его определяют. Это далеко не единственный пример аналогичных свойств точек и прямых — явления, которое называется

## ДВОЙСТВЕННОСТЬ

Если вдуматься, свойства прямых и точек в геометрии весьма схожи. Например, через две точки проходит единственная прямая, и на двух прямых лежит единственная точка. Правда, в геометрии Евклида есть параллельные прямые и нет параллельных точек. Свойства расстояний между точками и углов между прямыми тоже весьма похожи (например, выполняется аддитивность). Однако сходство и тут неполное: углы не превосходят определённой величины, расстояния же неограничены. Геометрия Галилея стирает все эти несогласованности: в ней прямые и точки отличаются не больше, чем положительные и отрицательные числа. А именно, существует взаимно однозначное соответствие (называемое *двойственностью*) между множеством точек и множеством прямых, обладающее следующими свойствами. Пусть точке  $A$  соответствует прямая  $a$ , а точ-

ке  $B$  — прямая  $b$ ; поскольку соответствие взаимно однозначное, то прямой  $a$  соответствует точка  $A$ , прямой  $b$  — точка  $B$ . Тогда 1) если точка  $A$  лежит на прямой  $b$ , то прямая  $a$  содержит точку  $B$ ; 2) расстояние от точки  $A$  до точки  $B$  равно углу от прямой  $a$  к прямой  $b$ . В качестве примера такого соответствия рассмотрим следующее:

$$\text{точка } M(p, q) \longleftrightarrow \text{прямая } m: y = px - q.$$

**23.** Проверьте, что это соответствие обладает описанными выше свойствами.

**24.** Может ли точка лежать на двойственной себе прямой? Если да, то что из себя представляет множество таких точек?

Нетрудно видеть, что в геометрии Галилея параллельные прямые при преобразовании двойственности переходят в точки, лежащие на одной окружности. Такие точки ради единства терминологии тоже называют *параллельными*. Ясно, что две непараллельные точки и соединяющая их прямая переходят, соответственно, в две прямые и точку их пересечения.

Интересно рассмотреть объекты, двойственные уже известным нам. Что, например, двойственно треугольнику? Вершины  $A$ ,  $B$  и  $C$  треугольника, будучи непараллельными точками, переходят в непараллельные прямые  $a$ ,  $b$  и  $c$ , причём  $a$  и  $b$  пересекаются в точке, являющейся образом стороны  $AB$  треугольника, и т. д. Таким образом, фигура, двойственная треугольнику, — тоже треугольник. При этом вершины соответствуют сторонам, длины сторон — углам, середины сторон — биссектрисам, основания биссектрис — медианам. Более того, рассмотрев некоторое утверждение о принадлежности точек прямым, длинах отрезков и величинах углов, мы можем сформулировать двойственное ему утверждение, заменив все слова в парах «прямая — точка», «принадлежит — содержит», «расстояние — угол» друг на друга. Полученное утверждение окажется верным, а его доказательство автоматически получится из доказательства исходного при выполнении в нём тех же замен! Таким образом можно получить «чудесные доказательства» некоторых уже упоминавшихся фактов. Например, теореме о том, что периметр треугольника равен нулю, двойственно утверждение о равенстве нулю суммы углов треугольника. Упомянутая в упражнении 12 «теорема синусов» оказывается «самодвойственным» утверждением.

**25.** Докажите, что равнобедренному треугольнику двойственен равнобедренный треугольник.

**26.** Найдите другое доказательство факта из упражнения 9. Теперь давайте рассмотрим фигуру, двойственную параллелограмму. Его пары параллельных сторон перейдут в пары параллельных точек, причём точка, соответствующая «верхней» прямой, окажется «ниже» точки, соответствующей «нижней». Вершины



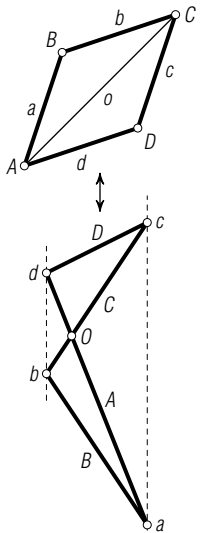


Рис. 20

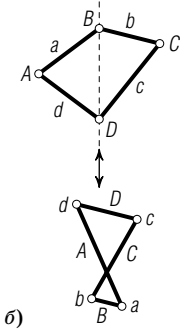
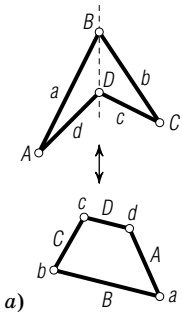


Рис. 21

параллелограмма перейдут в прямые, соединяющие указанные точки. В итоге получится фигура, которая называется *антипараллелограммом* (рис. 20). Получившаяся точка  $O$  соответствует одной из диагоналей исходного параллелограмма.

27. Какая точка соответствует другой диагонали параллелограмма? Какая прямая соответствует центру параллелограмма?

28. Очевидно, что в антипараллелограмме  $ad=cb$  и  $ab=cd$ . Какому утверждению о параллелограмме двойственен этот факт? Какие ещё двойственные друг другу свойства параллелограмма и антипараллелограмма вы можете указать?

Равносторонник имеет одну пару параллельных вершин, значит, двойственная ему фигура имеет пару параллельных сторон. Это — трапеция, если равносторонник невыпуклый (рис. 21, а), а в случае выпуклого равносторонника получается *псевдотрапеция* — трапеция без боковых сторон, но с диагоналями (рис. 21, б). Отметим, что трапеции и псевдотрапеции, двойственные равносторонникам, являются равнобедренными, поскольку противоположные углы равносторонников равны.

29. Как выглядит антиромб?

30. Какое свойство равносторонника двойственно лемме о трапеции?

Было бы заманчиво включить циклы в учение о двойственности. Для этого надо выяснить, какой объект двойственен циклу. Всякая точка цикла двойственна некоторой прямой. Оказывается, все эти прямые касаются одного и того же цикла! Этот цикл (его называют *огибающей линией* для указанного семейства прямых) разумно считать двойственным исходному циклу (рис. 22).

Докажем указанное утверждение. Рассмотрим все точки  $(p, ap^2 + bp + c)$  некоторого цикла ( $p$  — произвольное число). Им соответствуют прямые

$$y = px - ap^2 - bp - c.$$

Пусть все они касаются цикла  $y = kx^2 + mx + n$ . Тогда дискриминант квадратного уравнения

$$kx^2 + mx + n = px - ap^2 - bp - c$$

должен быть нулевым для любого  $p$ . Это значит, что

$$(m-p)^2 - 4k(n + ap^2 + bp + c) =$$

$$= (1 - 4ka)p^2 - (2m + 4kb)p + m^2 - 4kn - 4kc = 0$$

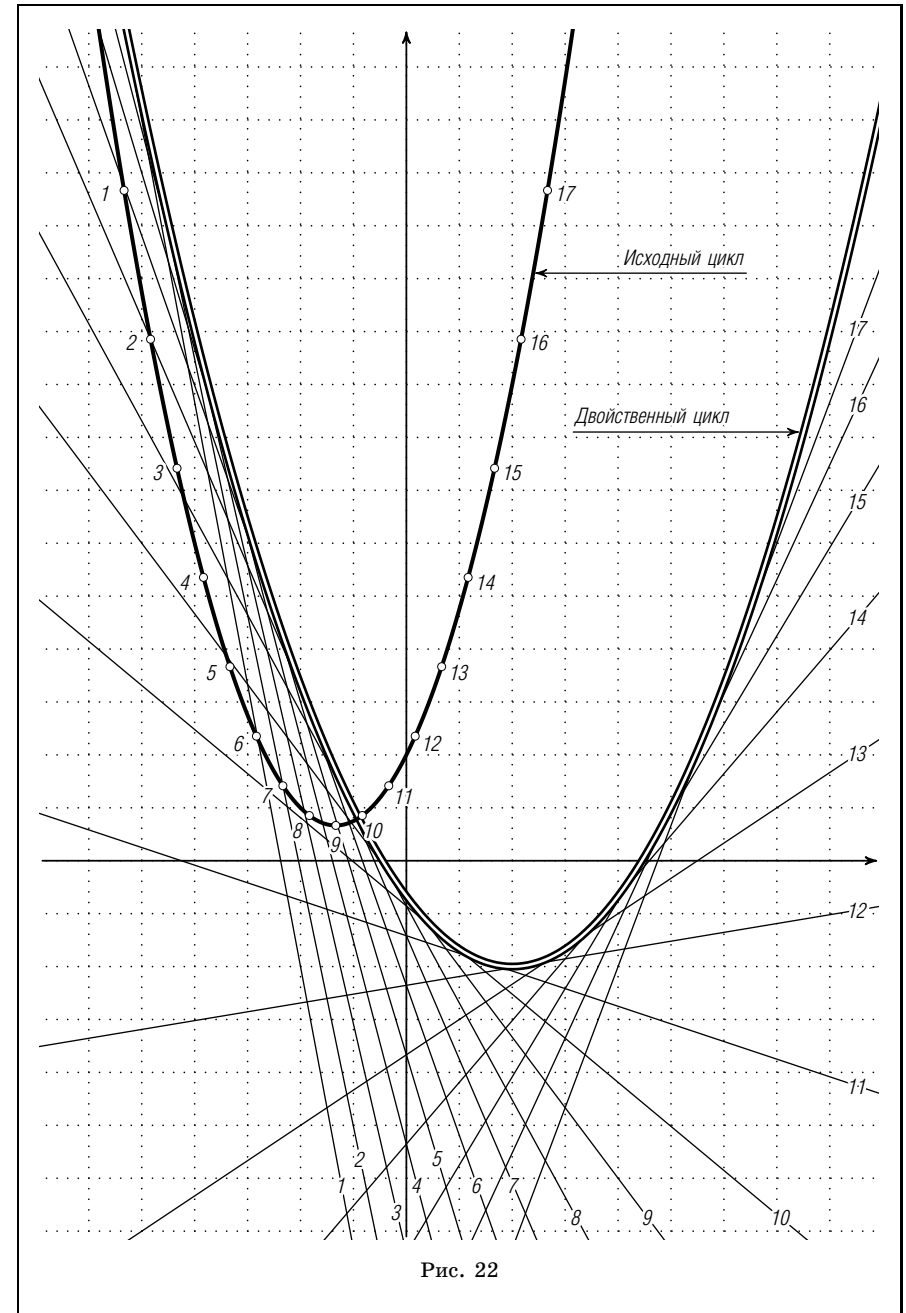


Рис. 22

для любого  $p$ , что возможно только при

$$\begin{cases} 1 - 4ka = 0, \\ 2m + 4kb = 0, \\ m^2 - 4kn - 4kc = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы последовательно находим  $k = \frac{1}{4a}$ ,  $m = -\frac{b}{2a}$ ,

$n = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ . Итак, циклу  $y = ax^2 + bx + c$  двойственен цикл

$$y = \frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x + \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

31. Проверьте, что циклу

$$y = \frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x + \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

двойственен цикл  $y = ax^2 + bx + c$ .

32. Бывают ли самодвойственные циклы?

Существуют ли

### ДРУГИЕ СООТВЕТСТВИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

между множеством точек и множеством прямых, т. е. соответствия, удовлетворяющие требованиям двойственности?

Да, существуют. Определим общий вид таких соответствий. Пусть точке  $(a, b)$  соответствует прямая  $y = k(a, b)x + l(a, b)$ . Поскольку параллельным точкам должны соответствовать параллельные прямые, а непараллельным — непараллельные, число  $k(a, b)$  одинаково для всех точек с одинаковой абсциссой и разное для точек с различными абсциссами. Значит,  $k(a, b)$  определяется только абсциссой точки:  $k(a, b) = k(a)$ . Более того, требование соответствия расстояния углу накладывает ограничение

$$a_1 - a_2 = k(a_1) - k(a_2)$$

для любых  $a_1$  и  $a_2$ , откуда

$$a_1 - k(a_1) = a_2 - k(a_2),$$

т. е.  $a - k(a) = \text{const}$ . Обозначив эту константу через  $\lambda$ , получаем:  $k(a) = a - \lambda$ . Итак, точка  $(a, b)$  переходит в прямую

$$y = (a - \lambda)x + l(a, b).$$

Далее, пусть даны две непараллельные точки  $P(a, b)$  и  $Q(c, d)$ .

Им соответствуют прямые  $y = (a - \lambda)x + l(a, b)$  и  $y = (c - \lambda)x + l(c, d)$ . Точке пересечения  $R$  этих прямых должна соответствовать прямая, проходящая через  $P$  и  $Q$ . Угловой коэффициент этой прямой равен  $\frac{d - b}{c - a}$ , а абсцисса точки  $R$  есть  $\frac{l(a, b) - l(c, d)}{c - a}$ , следовательно,

$$\frac{d - b}{c - a} = \frac{l(a, b) - l(c, d)}{c - a} - \lambda,$$

откуда

$$l(a, b) - l(c, d) = d - b + \lambda(c - a),$$

т. е.

$$l(a, b) + b + a\lambda = l(c, d) + d + c\lambda.$$

Это значит, что

$$l(a, b) + b + a\lambda = \text{const}.$$

Обозначив эту константу через  $\nu$ , получаем, что  $l(a, b) = \nu - a\lambda - b$ , а общий вид прямой, двойственной точке  $(a, b)$ , будет таким:

$$y = (a - \lambda)x + \nu - a\lambda - b.$$

Соответственно, точка, двойственная прямой  $y = kx + l$ , имеет координаты  $(k + \lambda, \nu - \lambda^2 - k\lambda - l)$ . Легко убедиться, что при любых  $\lambda$  и  $\nu$  указанное соответствие обладает всеми свойствами соответствия двойственности. Заметим также, что рассмотренное нами простейшее соответствие двойственности получается из общего при  $\lambda = \nu = 0$ .

\* \* \*

Мы затронули лишь небольшой круг начальных понятий геометрии Галилея, отталкиваясь от заданной группы преобразований. Изложение наше носит, впрочем, существенный недостаток: мы постоянно апеллируем к евклидовой геометрии, пытаемся ввести объекты, аналогичные евклидовым, перенести теоремы «школьной» планиметрии в новую область, вместо того, чтобы предоставить геометрии Галилея развиваться по своим внутренним законам. Но для краткого введения в круг подобных вопросов, наверное, необходимо от чего-то отталкиваться. И естественно задаться вопросом

### ЧТО ДАЛЬШЕ?

Какие вопросы и проблемы могут возникнуть при дальнейшем проникновении в глубины геометрии Галилея? По каким направлениям вести дальнейшее изучение? Мы очертим несколько вопросов

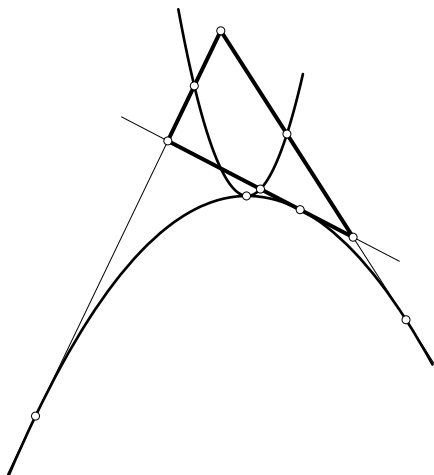
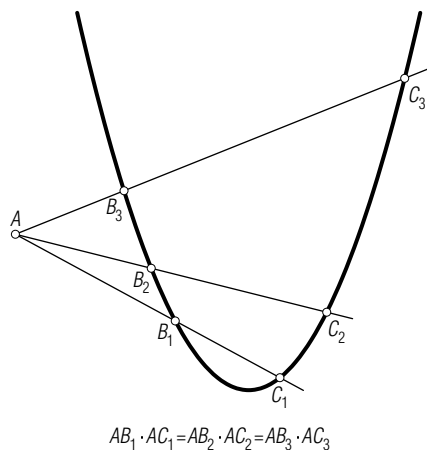


Рис. 23



$$AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2 = AB_3 \cdot AC_3$$

Рис. 24

для исследования, причём трудность зачастую окажется не в доказательстве, а в формулировке предложений. Ответить на чёткий вопрос чаще легче, чем задать его, поскольку, как сказано в одном из рассказов Роберта Шекли, «чтобы правильно задать вопрос, надо знать большую часть ответа».

Как выглядит в геометрии Галилея теория площадей? Можно определить площадь треугольника как полупроизведение высоты на основание, эта величина, как легко проверить, не зависит от выбора вершины ориентированного треугольника. Какие ещё формулы для площади треугольника будут справедливы? Как вычислить площадь многоугольника?

Какие ещё свойства евклидовой окружности имеют аналоги для цикла в геометрии Галилея? Некоторые факты можно извлечь из книги [2], где теория циклов развита довольно глубоко (доказывается, например, аналог теоремы Фейербаха: вписанный в треугольник цикл касается цикла, проходящего через середины сторон треугольника, рис. 23), а также из [5], где с разных точек зрения обсуждается параллелизм свойств параболы и окружности. Докажите, например, что величина  $\frac{l}{2a}$ , где  $l$  — длина хорды цикла, а  $a$  — величина опирающегося на неё вписанного угла, постоянна для данного цикла. Эту величину естественно назвать *радиусом цикла*. Для цикла  $y = ax^2 + bx + c$  она равна  $\frac{1}{2a}$  (убедитесь в этом). Можно ли придать какой-то разумный смысл

понятиям «центр цикла», «диаметр цикла»? Верен ли аналог теоремы об угле между хордой и касательной? Оказывается, не лишено смысла понятие *степени точки относительно цикла*, а именно, если через данную точку  $A$  проведена произвольная прямая, пересекающая цикл в точках  $B$  и  $C$ , то произведение  $AB \cdot AC$  не зависит от выбора секущей, а характеризует положение точки относительно цикла (рис. 24). Можно ли получить выражение этого произведения через радиус цикла и расстояние от точки до цикла? А как будет выглядеть радикальная ось двух циклов (множество точек, степени которых относительно двух циклов равны)?

Существуют ли в геометрии Галилея преобразования подобия и подобные фигуры? Обычная гомотетия в сочетании с движениями не меняет углы, изменяя расстояние в одинаковое число раз. Но есть и другое преобразование, также со свойствами подобия — сжатие к оси абсцисс, при котором каждая точка движется по окружности, изменяя в заданное количество раз расстояние от неё до оси абсцисс (рис. 25). Это подобие не изменяет расстояний, но меняет углы в фиксированное количество раз, оно как бы двойственно обычному подобию. Какой точный смысл стоит за этой видимой двойственностью? Каковы признаки и свойства подобных треугольников?

В евклидовой геометрии инверсия — пример преобразования, переводящего окружности и прямые в окружности и прямые. Есть ли аналог инверсии в геометрии Галилея?

Геометрию принято считать классическим примером теории, построенной на чёткой системе аксиом; такой подход общепринят по крайней мере со времён Евклида. Можно ли сформулировать аксиомы, задающие геометрию Галилея? К каким объектам они должны относиться? Насколько похожи будут аксиомы геометрий Евклида и Галилея? Эти вопросы представляются тонкими и сложными. Совпадение большого количества теорем в обеих геометриях заставляет думать, что это влияние общих аксиом. Возможно, в этих геометриях есть существенная общая часть, подобно тому, как абсолютная геометрия является частью и геометрии Евклида, и геометрии Лобачевского.

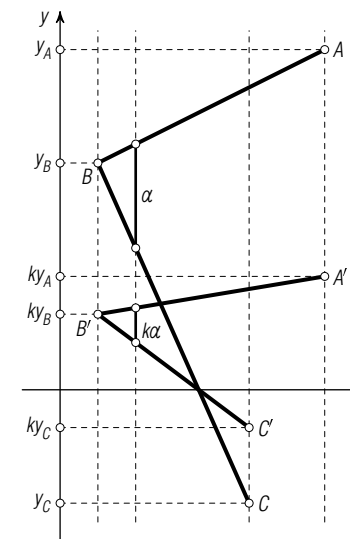


Рис. 25

### ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

33. Продолжения противоположных сторон четырёхугольника попарно пересекаются в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что если точки  $P$  и  $Q$  параллельны, то биссектрисы углов  $P$  и  $Q$  проходят через точку пересечения диагоналей четырёхугольника (рис. 26).

34. Как выглядит геометрическое множество точек, равноудалённых от данной точки и данной прямой?

35. Даны точка  $A$  и прямая  $l$ . Найдите геометрическое место точек  $X$  таких, что расстояние от  $X$  до  $A$  равно углу между прямыми  $XA$  и  $l$ .

36. Всякое ли движение геометрии Галилея является циклическим поворотом?

37. Сколько точек пересечения могут иметь цикл и двойственный ему? Какие прямые соответствуют этим точкам?

38. Вокруг треугольника  $ABC$  описан цикл, к которому в точках  $A, B, C$  проведены касательные. Докажите, что касательные в пересечении образуют треугольник, стороны которого вдвое меньше сторон исходного треугольника, а углы — вдвое больше углов исходного треугольника (рис. 27).

39. Докажите, что цикл, проходящий через середины сторон треугольника, проходит также и через основания его высот (рис. 28).

40. Даны две параболы с параллельными осями,  $A$  и  $B$  — точки их пересечения,  $MN$  — хорда одной из парабол. Прямые  $AM$  и  $BN$  вторично пересекают другую параболу в точках  $P$  и  $Q$ . Докажите, что прямые  $PQ$  и  $MN$  параллельны (рис. 29).

**З а м е ч а н и е.** Эта задача сформулирована и может быть решена в рамках евклидовой геометрии. Однако её решение становится очень простым, если понимать её как задачу геометрии Галилея.

### ЛИТЕРАТУРА

- [1] Яглом И. М. Геометрические преобразования: В 2-х ч. — Ч. 1: Движения и преобразования подобия. — М.: Гостехиздат, 1955; Ч. 2: Линейные и круговые преобразования. — М.: Гостехиздат, 1956.
- [2] Яглом И. М. Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия. — М.: Наука, 1969.
- [3] Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. — Т. 2: Геометрия. — М.: Наука, 1987.
- [4] Ефимов Н. В. Высшая геометрия. — М.: Наука, 1978.
- [5] Маркелов С. В. Парабола как окружность // Математическое образование. — 1998. — № 3—4; // X летняя конференция Турнира городов / Отв. ред. М. Н. Вялый. — М.: МЦНМО, 1999.

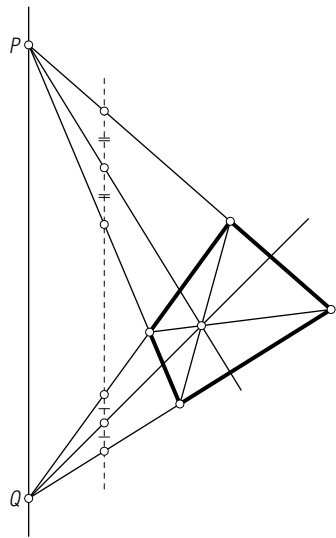


Рис. 26

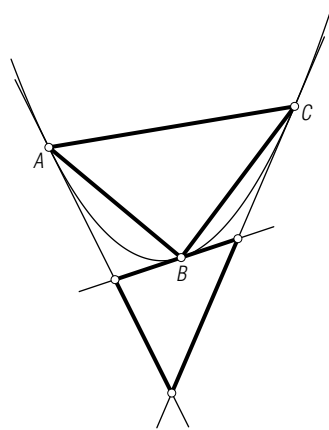


Рис. 27

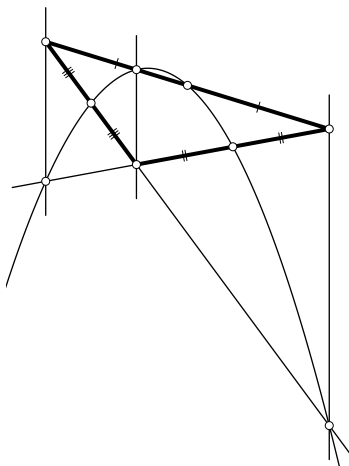


Рис. 28

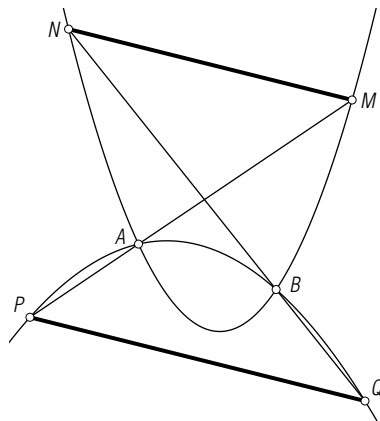


Рис. 29

## ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

1. Пусть  $g=[a, b, c]$ ,  $h=[-a, -b, ba-c]$ . Имеем:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= (x+a, y+bx+c), \\ (h \circ g)(x, y) &= h(g(x, y)) = h(x+a, y+bx+c) = \\ &= ((x+a)-a, (y+bx+c)-b(x+a)+(ba-c)) = (x, y). \end{aligned}$$

Тем самым  $h \circ g = [0, 0, 0] = \text{id}$ , т. е.  $h = g^{-1}$  — обратное к  $g$  преобразование.

2. Чтобы движение  $f=[a, b, c]$  переводило прямую  $y=kx+l$  в прямую  $y=k_1x+l_1$ , необходимо, чтобы все точки  $(x, y)=(x, kx+l)$  первой прямой после применения движения  $f$  оказывались на второй прямой. Для этого равенство

$$kx+l+bx+c=k_1(x+a)+l_1$$

должно выполняться для всех  $x$ . Значит,

$$\begin{cases} k+b=k_1, \\ l+c=k_1a+l_1. \end{cases} \quad (*)$$

Для любых значений  $k, l, k_1, l_1$ , очевидно, можно подобрать числа  $a, b, c$  для которых выполняется система (\*), причём таких подходящих троек  $(a, b, c)$  бесконечно много. Имеющаяся степень свободы соответствует тому, что совместив прямую  $y=kx+l$  с прямой  $y=k_1x+l_1$ , затем её можно ещё сдвинуть параллельно последней. Все такие движения (как следует из (\*)) исчерпываются формулой  $f=[a, k_1-k, k_1a+l_1-l]$  ( $a$  — произвольное число).

3. Движение  $g=[a, b, c]$  переводит прямую  $y=kx+l$  в прямую  $y=(k+b)x+(l+ba+c)$ . Поэтому параллельные прямые — прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами — переходят в прямые с одинаковыми угловыми коэффициентами, т. е. в параллельные.

Две параллельные прямые являются графиками движения двух скреплённых тел (например, двух вагонов одного поезда), которые, естественно, движутся с одинаковыми скоростями (это выражает равенство угловых коэффициентов прямых), но в разных точках пространства.

4. Если точки  $A_1(x_1, y_1)$  и  $A_2(x_2, y_2)$  переходят при движении  $f=[a, b, c]$  в точки  $B_1(x'_1, y'_1)$  и  $B_2(x'_2, y'_2)$ , то

$$x'_1 = x_1 + a, \quad x'_2 = x_2 + a, \quad y'_1 = y_1 + bx_1 + c, \quad y'_2 = y_2 + bx_2 + c,$$

следовательно,

$$x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1, \quad y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 + b(x_2 - x_1).$$

Поэтому

$$d(B_1, B_2) = x'_2 - x'_1 = x_2 - x_1 = d(A_1, A_2),$$

если же  $x_1 = x_2$ , то  $x'_1 = x'_2$ , и

$$d_{\text{особ.}}(B_1, B_2) = y'_2 - y'_1 = y_2 - y_1 + b \cdot 0 = d_{\text{особ.}}(A_1, A_2).$$

5. Пусть  $A(x_A, y_A)$  — точка пересечения прямых  $l_1$  и  $l_2$ , а точки  $B(x_B, y_B)$  и  $C(x_C, y_C)$  соответственно — точки пересечения этих прямых с единичной окружностью, вдоль которой измеряется угол  $\angle(l_1, l_2)$ , рис. 30. Имеем:

$$\angle(l_1, l_2) = d(B, C) = y_C - y_B = (k_2x_C + b_2) - (k_1x_B + b_1) = (k_2 - k_1)x_0 + (b_2 - b_1),$$

где  $x_0 = x_B = x_C$ . Поскольку  $y_A = k_1x_A + b_1 = k_2x_A + b_2$ , т. е.  $(k_2 - k_1)x_A + (b_2 - b_1) = 0$ ,

и  $x_0 = x_A + 1$ , то

$$\begin{aligned} \angle(l_1, l_2) &= (k_2 - k_1)x_0 + (b_2 - b_1) = (k_2 - k_1)(x_A + 1) + \\ &+ (b_2 - b_1) = ((k_2 - k_1)x_A + (b_2 - b_1)) + (k_2 - k_1) = k_2 - k_1. \end{aligned}$$

6. Если прямая  $m: y=kx+l$  образует равные углы с прямыми  $m_1: y=k_1x+l_1$  и  $m_2: y=k_2x+l_2$ , то  $\angle(m, m_1) = k_1 - k = k_2 - k = \angle(m, m_2)$ , откуда  $k_1 = k_2$ , значит,  $m_1 \parallel m_2$ .

Пусть  $m_1: y=k_1x+l_1$ ,  $m_2: y=k_2x+l_2$ ,  $m_3: y=k_3x+l_3$  — три прямые, причём  $m_1 \parallel m_3$  и  $m_2 \parallel m_3$ . Тогда  $k_1 = k_3$  и  $k_2 = k_3$ , значит,  $k_1 = k_2$  и  $m_1 \parallel m_2$ .

7. Ответ: в геометрии Галилея признак равенства треугольников по стороне и двум углам, прилегающим к ней, справедлив, а признак равенства по трём сторонам — нет.

Докажем признак равенства треугольников по стороне и двум прилегающим к ней углам. Пусть для треугольников  $ABC$  и  $A'B'C'$  выполнены равенства  $AB = A'B'$ ,  $\angle CAB = \angle C'A'B'$ ,  $\angle CBA = \angle C'B'A'$ . Рассмотрим движение  $g$ , переводящее отрезок  $AB$  в отрезок  $A'B'$ ; такое движение существует, поскольку выполнено равенство  $AB = A'B'$ , и единственно. Поскольку любое движение сохраняет углы, образ точки  $C$  лежит на прямой, составляющей с прямой  $A'B'$  угол, равный  $\angle CAB$ ; а так как  $\angle CAB = \angle C'A'B'$ , образ точки  $C$  лежит на прямой  $A'C'$ . Аналогично показывается, что образ точки  $C$  лежит и на прямой  $B'C'$ . Значит,  $C = C'$ , и движение  $g$  переводит треугольник  $ABC$  в треугольник  $A'B'C'$ , т. е. они равны.

То, что нет признака равенства треугольников по трём сторонам, понятно из рис. 31.

8. Понятно, что биссектриса угла  $A$  треугольника  $ABC$  проходит через середины высот  $BH_B$  и  $CH_C$ , биссектриса угла  $B$  — через середины высот  $AH_A$  и  $CH_C$ , биссектриса угла  $C$  — через середины высот  $AH_A$  и  $BH_B$  (рис. 32). Отсюда следует, что точки  $I_A, I_B, I_C$  пересечения биссектрис треугольника совпадают с серединами высот. А поэтому стороны треугольника  $I_A I_B I_C$  равны сторонам треугольника  $ABC$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} \angle I_A I_C I_B &= \angle I_A I_C A = \\ &= \frac{I_A A}{H_A A} \angle H_A C A = \frac{1}{2} \angle B C A = -\frac{1}{2} \angle A C B, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle I_B I_A I_C &= \angle C I_A I_C = \\ &= \frac{I_C C}{H_C C} \angle C A H_C = \frac{1}{2} \angle C A B = -\frac{1}{2} \angle B A C, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \angle I_C I_B I_A &= \angle I_C I_B C = \\ &= \frac{I_C C}{H_C C} \angle H_C B C = \frac{1}{2} \angle A B C = -\frac{1}{2} \angle C B A. \end{aligned}$$

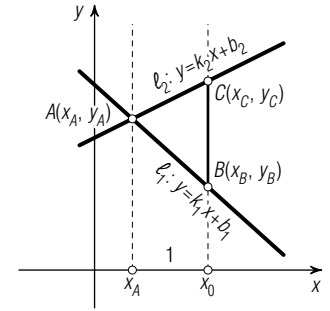


Рис. 30

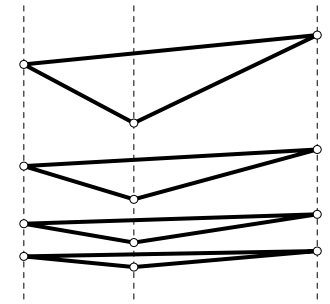


Рис. 31

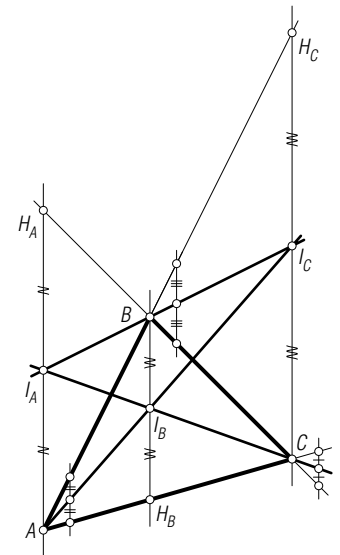


Рис. 32

9. Указание: воспользуйтесь результатом упражнения 8.

10. Ответ: не существуют. Предположим, что существует равносторонний треугольник  $ABC$ , тогда, с одной стороны, поскольку периметр любого треугольника равен нулю, то  $AB+BC+CA=0$ , с другой стороны,  $|AB|=|BC|=|CA|\neq 0$ . Но одновременно эти два условия выполняться не могут.

11. Ответ: да, в любом. Доказательство практически ничем не отличается от доказательства соответствующего утверждения евклидовой геометрии.

12. Обозначим координаты вершин треугольника:  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$ . Согласно результату упражнения 5 величина  $\angle ACB$  равна разности угловых коэффициентов прямых  $CB$  и  $AC$ , т. е.

$$\begin{aligned} \angle ACB &= \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} - \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \frac{x_C y_B - x_A y_B - x_C y_C + x_A y_C - x_B y_C + x_B y_A + x_C y_C - x_C y_A}{(x_B - x_C)(x_C - x_A)} = \\ &= \frac{x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)}{(x_C - x_B)(x_A - x_C)}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{(x_C - x_B)(x_A - x_C)(x_B - x_A)}{x_A(y_C - y_B) + x_B(y_A - y_C) + x_C(y_B - y_A)}.$$

Полученное выражение не меняется при циклических перестановках индексов  $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ , следовательно,

$$\frac{AB}{\angle ACB} = \frac{BC}{\angle BAC} = \frac{CA}{\angle CBA}.$$

13. Ответ: да, справедлива. Пусть  $L$  — точка пересечения биссектрисы угла  $C$  треугольника  $ABC$  со стороной  $AB$ ;  $\angle ACL = \angle LCB$ ,  $\angle CLA = \angle CLB$ . По теореме синусов (см. упражнение 12) для треугольников  $ALC$  и  $CLB$  имеем:

$$\frac{AL}{\angle ACL} = \frac{CA}{\angle CLA}, \quad \frac{LB}{\angle LCB} = \frac{BC}{\angle BLC}.$$

Разделив первое из этих равенств на второе, получим:

$$\frac{AL}{LB} = \frac{CA}{BC} \quad \text{или} \quad \frac{AL}{LB} = \frac{AC}{CB}.$$

14. В евклидовой геометрии диагонали четырёхугольника делятся точкой пересечения пополам тогда и только тогда, когда этот четырёхугольник является параллелограммом. Осталось вспомнить, что параллелограммы в геометрии Галилея являются параллелограммами и с точки зрения геометрии Евклида.

15. Обозначим угловые коэффициенты сторон четырёхугольника  $ABCD$  через  $k_{AB}$ ,  $k_{BC}$ ,  $k_{CD}$ ,  $k_{DA}$ . Тогда равенства противоположных углов можно записать следующим образом:  $k_{AB} - k_{BC} = k_{CD} - k_{DA}$ ,  $k_{BC} - k_{CD} = k_{DA} - k_{AB}$ . Складывая и вычитая друг из друга эти равенства, получаем:  $2k_{AB} = 2k_{CD}$  и  $-2k_{BC} = -2k_{DA}$ . Значит,  $AB \parallel CD$ ,  $BC \parallel DA$ .

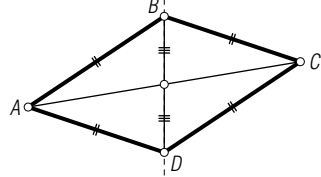


Рис. 33

16. Действительно, диагонали ромба перпендикулярны (поскольку одна из них, очевидно, является окружностью, т. е. особой прямой). Если считать, что особая прямая составляет равные углы со всеми прямыми, можно утверждать, что  $BD$  — биссектриса углов  $B$  и  $D$  ромба. Диагональ  $AC$  делит пополам углы  $A$  и  $C$ , поскольку она делит пополам «особую диагональ»  $BD$ , ведь каждый ромб — это параллелограмм (рис. 33).

Для произвольного же равносторонника можно лишь утверждать, что его диагонали перпендикулярны, поскольку одна из них является особой прямой.

17. Имеем:  $\angle CAD = \frac{CD}{AD}$ ,  $\angle CBD = \frac{CD}{BD}$  (рис. 34). Поэтому равенство  $\angle CAD = \angle CBD$  равносильно равенству  $AD = BD$ , значит, точки  $A$  и  $B$  лежат на одной окружности.

18. Ответ: да, верно. Рассмотрим трапецию  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ,  $A(x_A, y_A)$ ,  $B(x_B, y_B)$ ,  $C(x_C, y_C)$ ,  $D(x_D, y_D)$ ), вписанную в цикл  $y = ax^2 + bx + c$ . Поскольку  $AB \parallel CD$ , то

$$\frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{y_D - y_C}{x_D - x_C}. \quad (**)$$

Заметим, что

$$y_B - y_A = ax_B^2 + bx_B + c - ax_A^2 - bx_A - c = (x_B - x_A)(a(x_A + x_B) + b),$$

и, аналогично,  $y_D - y_C = (x_D - x_C)(a(x_C + x_D) + b)$ . Значит, равенство (\*\*) равносильно такому:

$$a(x_A + x_B) + b = a(x_C + x_D) + b,$$

откуда  $x_A + x_B = x_C + x_D$ . Это равенство можно переписать в виде  $x_C - x_B = x_A - x_D$ . Поэтому  $BC = DA$ .

Заметим, что обратное утверждение неверно. Покажите самостоятельно, что равнобедренную трапецию  $ABCD$  ( $AB \parallel CD$ ) можно вписать в цикл тогда и только тогда, когда выполнено равенство  $x_A + x_B = x_C + x_D$  (это равенство равносильно тому, что середины оснований трапеции лежат на особой прямой).

19. Подвергнем цикл  $y = kx^2 + mx + n$  движению  $[a, b, c]$ . При этом движении каждая его точка  $(x, y) = (x, kx^2 + mx + n)$  переходит в точку  $(x', y') = (x + a, kx^2 + mx + n + bx + c)$ . Чтобы все такие точки лежали на некотором цикле  $y' = px'^2 + qx' + r$ , равенство

$$\begin{aligned} kx^2 + mx + n + bx + c &= p(x + a)^2 + q(x + a) + r, \\ kx^2 + (m + b)x + (n + c) &= px^2 + (2ap + q)x + (r + aq + a^2p) \end{aligned}$$

должно выполняться для всех  $x$ , что возможно лишь при

$$\begin{cases} k = p, \\ m + b = 2ap + q, \\ n + c = r + aq + a^2p. \end{cases}$$

Из этой системы находим, что  $p = k$ ,  $q = m + b - 2ak$ ,  $r = n + c - am - ab + a^2k$ . Следовательно, при движении  $[a, b, c]$  цикл  $y = kx^2 + mx + n$  переходит в цикл  $y^2 = kx^2 + (m + b - 2ak)x + n + c - am - ab + a^2k$ .

20. Точка  $(x, y) = (x, ax^2 + bx + c)$  цикла  $y = ax^2 + bx + c$  при движении  $[\lambda, m, n]$ , переводящем цикл в себя, получает координаты  $(x + \lambda, ax^2 + bx + c + m(x + \lambda) + n)$  и должна опять лежать на цикле  $y = ax^2 + bx + c$ , т. е. при любом  $x$  должно выполняться равенство

$$a(x + \lambda)^2 + b(x + \lambda) + c = ax^2 + bx + c + m(x + \lambda) + n.$$

Преобразуем его:

$$\begin{aligned} ax^2 + 2a\lambda x + a\lambda^2 + bx + b\lambda + c - ax^2 - bx - c - mx - m\lambda - n &= 0, \\ x(2a\lambda - m) + (a\lambda^2 + b\lambda - m\lambda - n) &= 0. \end{aligned}$$

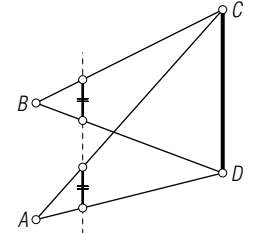


Рис. 34

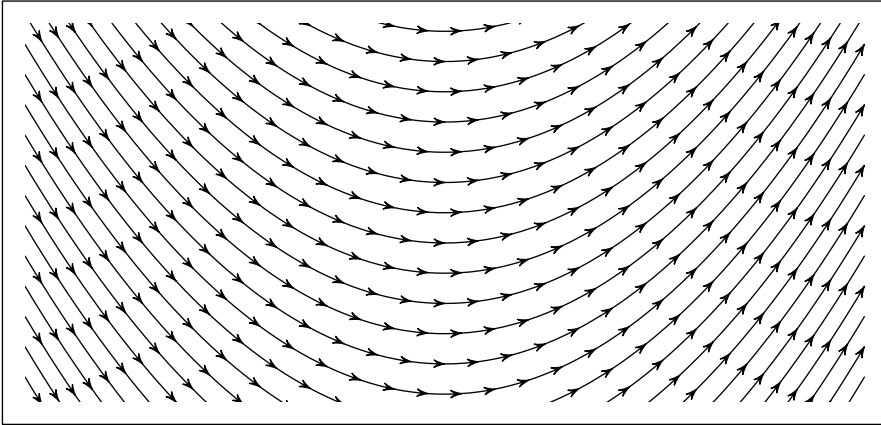


Рис. 35

Получаем систему уравнений для  $m$  и  $n$ :

$$\begin{cases} 2a\lambda - m = 0, \\ a\lambda^2 + b\lambda - m\lambda - n = 0. \end{cases}$$

Откуда  $m = 2a\lambda$ ,  $n = b\lambda - a\lambda^2$ . Значит, все движения  $[\lambda, 2a\lambda, b\lambda - a\lambda^2]$  и только они переводят цикл  $y = ax^2 + bx + c$  в себя.

Поскольку в формулу движений, сохраняющих фиксированный цикл  $y = a_0x^2 + b_0x + c_0$ , не входит  $c_0$ , эти движения сохраняют и все циклы  $y = a_0x^2 + b_0x + c$  (с произвольными значениями  $c$ ); все точки плоскости как бы сдвигаются вдоль этих циклов (рис. 35). Поэтому не любую точку плоскости можно перевести таким движением в некоторую фиксированную.

**21.** Докажем, что касательная к параболе  $y = x^2$  в точке  $M(x_0, x_0^2)$  имеет уравнение  $y = 2x_0x - x_0^2$ . Тем самым и будет доказано, что для каждого углового коэффициента  $k$  существует единственная касательная к параболе  $y = x^2$  с угловым коэффициентом  $k$  — таковой будет касательная в точке  $\left(\frac{k}{2}, \frac{k^2}{4}\right)$ , и только она.

Первое доказательство (с использованием определения касательной как предельного положения секущей). Касательная к параболе в точке  $M(x_0, x_0^2)$  — это предельное положение прямой  $M_1M_2$ , где  $M_1(x_0 - \varepsilon, (x_0 - \varepsilon)^2)$ ,  $M_2(x_0 + \varepsilon, (x_0 + \varepsilon)^2)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вычислим угловой коэффициент  $k'$  прямой  $M_1M_2$ :

$$k' = \frac{(x_0 + \varepsilon)^2 - (x_0 - \varepsilon)^2}{(x_0 + \varepsilon) - (x_0 - \varepsilon)} = \frac{4x_0\varepsilon}{2\varepsilon} = 2x_0.$$

Значит, и касательная к параболе в точке  $M$  имеет угловой коэффициент  $2x_0$ . Осталось подобрать свободный член  $b$  уравнения  $y = 2x_0x + b$  этой касательной, так чтобы касательная проходила через точку  $M(x_0, x_0^2)$ . Имеем:  $x_0^2 = 2x_0 \cdot x_0 + b$ , откуда  $b = -x_0^2$ .

Второе доказательство (с использованием производной). Те, кто знаком с понятием производной, знают, что уравнение касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $(x_0, y_0)$  имеет вид  $y = f'(x_0)x + (y_0 - f'(x_0)x_0)$ . Поскольку  $(x^2)' = 2x$ , то уравнение касательной к параболе — это в точности  $y = 2x_0x - x_0^2$ . Фактически, первое доказательство ничем не отличается от этого, и там, и здесь мы вычисляли производную функции  $x^2$ .

Третье доказательство (с использованием геометрического определения параболы). Геометрическое определение параболы гласит: парабола — это множество точек, равноудалённых\*) от данной точки  $F$  (фокуса параболы) и данной прямой  $d$  (директрисы параболы), рис. 36. Для параболы  $y = x^2$  фокус — это точка  $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ , а директриса имеет уравнение  $y = -\frac{1}{4}$  (проверьте

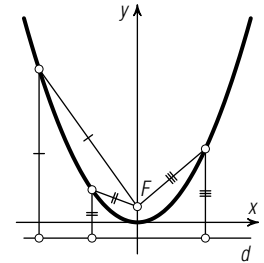


Рис. 36

это самостоятельно). Докажем утверждение, называемое оптическим свойством параболы, а именно, что касательная к параболе в точке  $M$  является биссектрисой угла  $FMG$  ( $G$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $M$  на директрису), рис. 37. Предположим, что биссектриса угла  $FMG$  не является касательной и имеет (кроме  $M$ ) ещё одну точку пересечения с параболой, обозначим её буквой  $N$  (рис. 38), опустим из  $N$  перпендикуляр  $NH$  на директрису. Поскольку точка  $M$  лежит на параболы, то  $FM = MG$ , значит,  $MN$  — биссектриса равнобедренного треугольника  $FMG$ , а значит, и высота, и медиана. Другими словами,  $MN$  является срединным перпендикуляром к  $FG$ , следовательно,  $FN = NG$ . Кроме того, поскольку точка  $N$  лежит на параболы, то для неё верно равенство  $FN = NH$ . Мы получили противоречие: перпендикуляр  $NH$  не может быть равен наклонному отрезку  $NG$ , значит, биссектриса угла  $FMG$  имеет единственную общую точку с параболой (точку  $M$ ), и, тем самым, является касательной. Заметим, что мы также доказали, что касательная к параболы в точке  $M(x_0, x_0^2)$  проходит через середину отрезка  $FG$  (рис. 38), имеющую

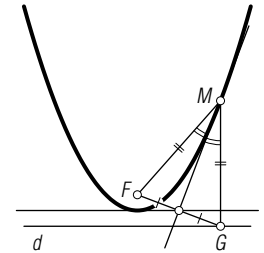


Рис. 37

координаты  $\left(\frac{x_0}{2}, 0\right)$ . Теперь, зная координаты уже двух точек, лежащих на касательной, несложно написать её уравнение.

**22.** Пусть цикл задан уравнением  $y = ax^2 + bx + c$ , и пусть к нему проведены две касательные из точки  $(x_0, y_0)$  (рис. 39). Обозначим координаты точек касания через  $(x_1, y_1)$  и  $(x_2, y_2)$ . Поскольку касательная к циклу  $y = ax^2 + bx + c$ , проведённая в точке  $(x', ax'^2 + bx' + c)$ , имеет уравнение  $y = (2ax' + b)x + c - ax'^2$  (см. решение предыдущего упражнения), то

$$y_0 = (2ax_1 + b)x_0 + c - ax_1^2 = (2ax_2 + b)x_0 + c - ax_2^2.$$

Это равенство можно переписать в виде  $2a(x_1 - x_2)x_0 = a(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$ , откуда  $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ . Поэтому

$$\begin{aligned} |d((x_1, y_1), (x_0, y_0))| &= |x_0 - x_1| = \\ &= |x_0 - x_2| = |d((x_2, y_2), (x_0, y_0))|. \end{aligned}$$

\*) Здесь и далее в тексте доказательства все термины (расстояние, угол, биссектриса и т. п.) понимаются в евклидовом смысле.

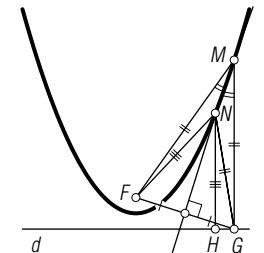


Рис. 38

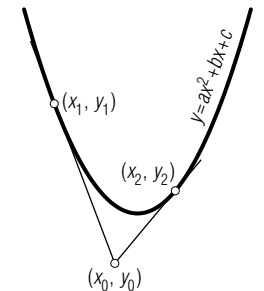


Рис. 39

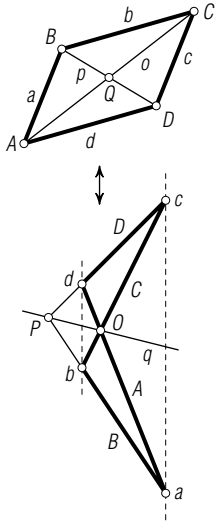


Рис. 40

23. 1) Рассмотрим точку  $A(p, q)$  и прямую  $l: y = rx + s$ . При соответствии  $(\alpha, \beta) \leftrightarrow y = \alpha x - \beta$  им соответствуют прямая  $a: y = px - q$  и точка  $L(r, -s)$ . Нам надо проверить, что если  $A$  лежит на  $l$ , то  $L$  лежит на  $a$ , т. е. что из равенства  $q = pr + s$  следует равенство  $-s = pr - q$ . Но это, очевидно, так.

2) Рассмотрим теперь точки  $A(p, q)$  и  $B(r, s)$  и соответствующие им прямые  $a: y = px - q$  и  $b: y = rx - s$ . Имеем:  $d(A, B) = r - p$ , а согласно результату упражнения 5,  $\angle(a, b) = r - p$ . Значит, и в самом деле,  $d(A, B) = \angle(a, b)$ .

24. Если точка  $(a, b)$  лежит на двойственной себе прямой  $y = ax - b$ , то  $b = a^2 - b$ , т. е.  $b = \frac{1}{2}a^2$ . Множество таких

точек представляет собой цикл  $y = \frac{1}{2}x^2$  (являющийся самодвойственным, см. упражнение 32).

25. У треугольника, двойственного равнобедренному, равны две стороны, поскольку у исходного равнобедренного треугольника равны углы при основании.

26. Утверждение задачи 9 является двойственным такому: середина стороны треугольника и противоположная ей вершина параллельны (лежат на одной окружности) тогда и только тогда, когда треугольник равнобедренный.

27. Второй диагонали параллелограмма соответствует точка  $P$  пересечения продолжений противоположных сторон антипараллелограмма (рис. 40). Центру параллелограмма соответствует прямая  $OP$ , соединяющая точки, соответствующие диагоналям параллелограмма (см. рис. 40).

28. Равенствам  $ad = cb$ ,  $ab = cd$  для антипараллелограмма двойственны равенства  $\angle(a, d) = \angle(c, b)$ ,  $\angle(a, b) = \angle(c, d)$  противоположных углов параллелограмма. Например, двойственными являются и следующие утверждения:

диагонали параллелограмма делятся точкой пересечения пополам  $\leftrightarrow$  прямая  $q$  (см. рис. 40) делит пополам углы между прямыми  $ab$  и  $cd$ ,  $ad$  и  $cb$ ;

противоположные стороны  $AB$  и  $DC$ ,  $BC$  и  $DA$  параллелограмма равны по длине  $\leftrightarrow$  противоположные углы  $\angle(A, B)$  и  $\angle(D, C)$ ,  $\angle(B, C)$  и  $\angle(D, A)$  антипараллелограмма равны.

29. Согласно определению, ромб — это параллелограмм, у которого две противоположные вершины параллельны. Поэтому антиромб — это антипараллелограмм, у которого две противоположные стороны параллельны (рис. 41).

30. Переведём «пословно» лемму о трапеции на «двойственный язык».

Точка пересечения . . . . . Прямая, проходящая через продолжений непараллельных сторон, . . . непараллельные вершины, точка пересечения . . . . . прямая, проходящая через прямых, соединяющих . . . . . точки пересечения противоположных вершины, . . . . . противоположных сторон, середины . . . . . биссектрисы углов параллельных сторон . . . . . при параллельных вершинах трапеции . . . . . равносторонника лежат на одной прямой. . . . . пересекаются в одной точке.

Вообще говоря, полученное двойственное утверждение неверно. Дело в том, что мы забыли учесть то, что трапеция является равнобедренной, а для неё четыре

точки из леммы о трапеции лежат не на прямой, а на особой прямой (т. е. параллельны)! Правильный перевод такой:

Точка пересечения . . . . . Прямая, проходящая через продолжений непараллельных сторон, . . . непараллельные вершины, точка пересечения . . . . . прямая, проходящая через прямых, соединяющих . . . . . точки пересечения противоположных вершины, . . . . . противоположных сторон, середины . . . . . биссектрисы углов параллельных сторон . . . . . при параллельных вершинах равнобедренной трапеции . . . . . равносторонника параллельны. . . . . параллельны (рис. 42).

31. Пусть циклу

$$y = \frac{1}{4a}x^2 - \frac{b}{2a}x + \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a'x^2 + b'x + c,$$

где  $a' = \frac{1}{4a}$ ,  $b' = -\frac{b}{2a}$ ,  $c' = \frac{b^2 - 4ac}{4a}$  двойственен циклу  $y = a''x^2 + b''x + c''$ . Тогда

$$a'' = \frac{1}{4a'} = \frac{1}{4 \cdot \frac{1}{4a}} = a, \quad b'' = -\frac{b'}{2a'} = -\frac{-\frac{b}{2a}}{2 \cdot \frac{1}{4a}} = b,$$

$$c'' = \frac{b'^2 - 4a'c'}{4a'} = \frac{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{b^2 - 4ac}{4a}}{4 \cdot \frac{1}{4a}} = \frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{b^2}{4a} - \frac{1}{a} \cdot \frac{b^2 - 4ac}{4a}}{\frac{1}{a}} = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = c.$$

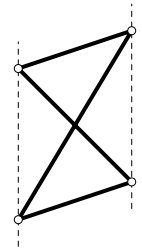


Рис. 41

32. Цикл  $y = ax^2 + bx + c$  является самодвойственным, если и только если

$$\frac{1}{4a} = a, \quad -\frac{b}{2a} = b, \quad \frac{b^2 - 4ac}{4a} = c.$$

Из первого равенства следует, что  $a = \pm \frac{1}{2}$ . Из второго понятно, что при  $b \neq 0$  годится лишь  $a = -\frac{1}{2}$ . Перепишем третье равенство:  $\frac{b^2 + 2c}{-2} = c$ , или  $c = -\frac{b^2}{4}$ . При

$b = 0$  годятся оба значения  $a = \pm \frac{1}{2}$ ; из третьего равенства следует, что в этом случае обязательно  $c = 0$ . Значит, самодвойственными являются циклы

$$y = \frac{1}{2}x^2 \quad \text{и} \quad y = -\frac{1}{2}x^2 + bx - \frac{b^2}{4}$$

( $b$  — произвольное число) и только они.

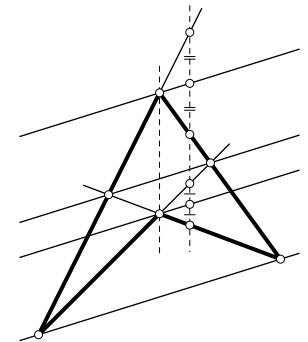


Рис. 42



## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	3
Преобразования Галилея . . . . .	4
Прямые . . . . .	5
Расстояние между точками . . . . .	6
Окружность . . . . .	6
Углы . . . . .	7
Треугольники . . . . .	8
Четырёхугольники . . . . .	10
Цикл . . . . .	12
Двойственность . . . . .	14
Другие соответствия двойственности	18
Что дальше? . . . . .	19
Задачи для самостоятельного решения . . . . .	22
Литература . . . . .	23
Ответы, указания, решения	24

## БИБЛИОТЕКА «МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ»

1.	В. М. Тихомиров	Великие математики прошлого и их великие теоремы
2.	А. А. Болибрух	Проблемы Гильберта (100 лет спустя)
3.	Д. В. Аносов	Взгляд на математику и нечто из неё
4.	В. В. Прасолов	Точки Брокара и изогональное сопряжение
5.	Н. П. Долбиллин	Жемчужины теории многогранников
6.	А. Б. Сосинский	Мыльные плёнки и случайные блуждания
7.	И. М. Парамонова	Симметрия в математике
8.	В. В. Острик, М. А. Цфасман	Алгебраическая геометрия и теория чисел: рациональные и эллиптические кривые
9.	Б. П. Гейдман	Площади многоугольников
10.	А. Б. Сосинский	Узлы и косы
11.	Э. Б. Винберг	Симметрия многочленов
12.	В. Г. Сурдин	Динамика звёздных систем
13.	В. О. Бугаенко	Уравнения Пелля
14.	В. И. Арнольд	Цепные дроби
15.	В. М. Тихомиров	Дифференциальное исчисление (теория и приложения)
16.	В. А. Скворцов	Примеры метрических пространств
17.	В. Г. Сурдин	Пятая сила
18.	А. В. Жуков	О числе $\pi$
19.	А. Г. Мякишев	Элементы геометрии треугольника
20.	И. В. Яценко	Парадоксы теории множеств
21.	И. Х. Сабитов	Объёмы многогранников
22.	А. Л. Семёнов	Математика текстов
23.	М. А. Шубин	Математический анализ для решения физических задач
24.	А. И. Дьяченко	Магнитные полюса Земли
25.	С. М. Гусейн-Заде	Разборчивая невеста
26.	К. П. Кохась	Ладейные числа и многочлены
27.	С. Г. Смирнов	Прогулки по замкнутым поверхностям
28.	А. М. Райгородский	Хроматические числа
29.	С. Б. Гапков	Системы счисления и их применение
30.	Ю. П. Соловьёв	Неравенства
31.	В. Ю. Протасов	Максимумы и минимумы в геометрии
32.	А. В. Хачатурян	Геометрия Галилея