Сгибнев А.И.

Экспериментальная математика

Когда я учился классе в пятом, то заметил такую закономерность:
$2\cdot 2-1=1\cdot 3$, $3\cdot 3-1=2\cdot 4$, $4\cdot 4-1=5\cdot 3$, …
Было очень интересно: бери любые соседние числа – и всё получится.
Потом я узнал, что есть формула $a^2-1=(a-1)(a+1)$.
Но это объяснение не вызывало таких эмоций, как само открытие.

Эксперимент в математике

Математика – экспериментальная наука
В.И. Арнольд

Слова «эксперимент» и «математика», поставленные рядом, могут вызвать недоумение. Казалось бы, вот образец дедуктивной науки! Вспомним хотя бы «Начала» Евклида: аксиома – определение – формулировка теоремы – доказательство.

Давайте разберёмся: правда ли математики думают по такой же «схеме в четыре такта», по какой обычно пишут свои работы? Этому вопросу посвящена книга Дьердя Пойа (Polya) «Математика и правдоподобные рассуждения» [1]. Автор убедительно показывает, что «в своём математическом творчестве математик так же пользуется наблюдением и обобщением, гипотезой и экспериментом, как это делает всякий естествоиспытатель» [1, стр. 6]. В настоящих научных проблемах всё не так гладко, как кажется при чтении. Если проблема слишком сложная и не поддаётся «прямым атакам», то полезно сравнить её с похожей задачей, которая уже решена, или рассмотреть несколько частных случаев и попытаться угадать стоящую за ними закономерность. Затем приходит пора строгого доказательства (или опровержения) *уже установленного утверждения*. При изложении результатов в статье, учебнике обычно оставляют только *фазу доказательства*, а *фазу поиска* пропускают, как «несущественную». Однако в педагогическом отношении работа от этого часто теряет, поскольку читателю не показывают, *как можно было додуматься до теоремы,* хотя бы и строго доказанной потом.

Пойа подкрепляет свои положения выдержками из трудов крупнейшего математика XVIII века Леонарда Эйлера (Euler). Эйлер широко пользовался наблюдением, индукцией и аналогией, например, в теории чисел. Свои открытия он часто излагал *эвристически*, прибавляя к ним «чистосердечное изложение идей, приведших его к этим открытиям» [1, стр. 115]. Из современных сторонников взгляда на математику как экспериментальную науку следует вспомнить Владимира Арнольда, автора эпиграфа. По мнению Арнольда, в математике идёт борьба «естествоиспытателей» с «аксиомофилами», рассматривающими всю математику как последовательное выведение следствий из системы аксиом, взятых из головы, не имеющих отношения к внешнему миру. «Я расскажу об экспериментальных числовых наблюдениях, которые подсказывают новые (поразительные) законы природы, но которые далеко не сразу превращаются в теоремы. Я думаю, что в некоторых случаях доказательств придётся ждать сотню-другую лет… хотя сами открытия новых законов могут быть доступны школьникам.» [2]

Эксперимент в школьной математике

Вопросы важнее ответов.
А.К. Звонкин

Итак, эксперимент в *науке* математике использовали и используют. Но значит ли это что-нибудь для *школы*? Какие могут быть математические эксперименты на уроках?

1. Опытный учитель, задав вопрос, делает паузу и даёт детям подумать. Это же можно делать в б**о**льших масштабах. Как правило, теоретический материал также является ответом на некоторый обобщённый вопрос: облегчает решение задач, упорядочивает примеры, создавая стройную картину… Полезно в той или иной форме задать этот вопрос и дать ученикам его осознать.

Введя понятия НОК и НОД, не будем сразу давать алгоритм их нахождения, а поищем один урок перебором. Во-первых, определение лучше усвоится и отделится от алгоритма, а во-вторых, дети смогут оценить преимущества нового способа.

Прежде чем формулировать основную теорему арифметики, спросим учеников: что получится, если раскладывать большое число, скажем 360, на простые множители в разном порядке? Попробуем. «Глядите-ка, получились одинаковые делители. Это не случайно. Есть такое утверждение…»

Перед введением числа π померяем длины и радиусы нескольких окружностей и посчитаем отношения.

Прежде чем выводить формулу для корней квадратного уравнения, порешаем уравнения выделением полного квадрата.

<u>В физматклассах.</u> Многочлен Тейлора естественно дать как решение локальной задачи аппроксимации (сначала линейной, потом квадратичной и т.д.). А уж потом можно переходить к ряду Тейлора, который без этого непонятно кому и зачем нужен. Формулу Ньютона-Лейбница осознают как великое открытие лучше, если до неё посчитать несколько квадратур вручную (площадь под параболой, под синусоидой).

Экспериментальная пауза позволяет ученику осознать вопрос как заданный *ему*, и последующее теоретическое разрешение воспринимается как ответ на *его* вопрос. При этом подходе легче понять, что теорию придумывают для облегчения жизни, а не для зубрёжки.

2. Отдельные задачи можно формулировать *открыто*, т.е. так, чтобы ученик, рассматривая описанную ситуацию, сам догадался до утверждения, которое нужно доказать [3, 4].

«Через центр квадрата в его плоскости проведена прямая. При каком положении прямой сумма квадратов расстояний прямой до вершин квадрата будет наибольшей?» Ученик рисует пару положений, считает и обнаруживает, что сумма для них одинакова. Возникает догадка, что сумма не зависит от положения прямой. Это рассуждение *по индукции.* Дальше можно спросить, для какого *треугольника* может выполняться это утверждение. Наверно, этот треугольник должен обладать тем же свойством, которое выделяет квадрат среди всех четырёхугольников, т.е. быть правильным. Это рассуждение *по аналогии.* Доказательно? Нет. Работает? Очень часто.

Мне скажут: «Всё хорошо, но что это за игра в догадки? Великая роль математики в том, что она учит детей логике. А вы предлагаете их учить какому-то гаданию на кофейной гуще».

Тут всё не так просто, давайте разберёмся. Есть разная логика. Есть логика рассуждения, и математика действительно учит ей. Но есть ещё логика открытия, эвристика, которая не имеет доказательной силы, но двигает творчество. Пафос Пойа в том, что эвристика полезна и на математическом материале ей можно научить не хуже, чем логике.[1] Мы пренебрегаем этой возможностью, когда пропускаем в обучении фазу поиска [3, 4] и отмахиваемся от нестрогих рассуждений как якобы недостойных математика. А ведь всего-то и надо, что честно объяснить ученикам: это не доказательство, а только способ догадаться, выдвинуть гипотезу, которую потом надо проверять. Очень точно выразил это Эйлер: наблюдения «будут вести нас к новым свойствам, которые позже мы будем стараться доказать. Этот вид знания… следует тщательно отличать от истины. …мы должны пользоваться таким открытием как возможностью более точно исследовать эти открытые свойства и доказать их или опровергнуть; в обоих случаях мы можем научиться кое-чему полезному» [1, стр. 21].

Эвристика и логика действуют в науке рука об руку, и именно так усваиваются лучше всего[2]. Дело в том, что далеко не все ученики, даже одарённые, имеют способности и вкус к строгим теоретическим выкладкам, но практически все могут наблюдать, подмечать закономерности, проверять их. Таким образом, занимаясь математическим экспериментом, каждый ученик оказывается активным участником исследования. Сможет ли ученик доказать свои гипотезы сам или услышит доказательство от учителя – всё равно он уже включён, ориентируется в материале, это *его* гипотезы. Заметьте, что если дать предыдущую задачу в обычной формулировке: «Доказать, что сумма квадратов расстояний до вершин квадрата одинакова для любой прямой, проходящей через его центр», - этой фазы

[1] Пойа также считает, что на примере *математики* школьник хорошо может осознать непростой вопрос о роли эксперимента в *естественных науках*.

[2] Да и разделить их не всегда просто. См. замечательную книгу И. Лакатос «Доказательства и опровержения». – М., Наука, 1967.

поиска не было бы. Мы выиграли бы время, но потеряли бы интерес и вовлечённость. А непосильные абстракции только оттолкнут и от математики, и от логики.

Задача учителя – предлагать достойные темы, показывать методы исследования, побуждать к теоретическому обоснованию гипотез, выдержавших экспериментальные проверки. Не стоит сужать эксперимент до простой демонстрации уже открытых фактов (хотя сама по себе она тоже неплоха). С другой стороны, не стоит злоупотреблять экспериментами в области, которую ученики ещё не способны осмыслить теоретически (хотя небольшие «заделы» полезны).

Опыт реализации

Изложенные соображения автору удалось в большей или меньшей мере реализовать в нескольких педагогических ситуациях. К их описанию мы и переходим.

1. Математическая индукция

Обычно решение задач по математической индукции сводится к отработке техники: дают готовое утверждение (формулу) T_k , нужно проверить, что 1) оно верно при $k=1$ и 2) из T_k следует T_{k+1} . Как это утверждение найдено, обычно никого не интересует. На мой взгляд, это непроизводительная трата ресурсов. Можно на одном материале и отработать технику, и поучиться угадывать. В простых задачах можно просто выкинуть утверждение – пусть найдут по *неполной*[3] индукции. В более сложных стоит указать аналогию или дать указание, или привести частный случай и попросить обобщить. Действуя таким образом, я смог составить подборку задач по теме «Мат. индукция» для математической группы 9 класса, в большинстве которых утверждение не дано. Я привожу эти задачи здесь. (Использованы материалы из книги [5], а также задачник [6].)

1. Докажите формулу для суммы первых n натуральных чисел.[4] Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про сумму первых n чётных чисел; первых n нечётных чисел.
2. Подберите коэффициенты a, b, c, d так, чтобы сумма квадратов первых n натуральных чисел равнялась an^3+bn^2+cn+d (при любом n) и докажите полученную формулу.
3. Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение про сумму $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$.
4. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную предыдущей, для суммы кубов первых n натуральных чисел.
5. Найдите и докажите формулу для суммы знакопеременной суммы $1-2+3-4+5\ldots n$ (чётные числа с минусом, нечётные с плюсом).
6. Сформулируйте и решите задачу, аналогичную предыдущей, для знакопеременной суммы квадратов. Предложите общую гипотезу.[5]
7. Найдите и докажите формулу для суммы $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{2^i}$ (она имеет вид $a+\frac{b+cn}{2^n}$ для некоторых чисел a, b, c).
8. Найдите и докажите формулу для суммы $\sum_{i=1}^{n} i\cdot 2^i$.
9. Найдите и докажите формулу для $(a_1+a_2+\ldots+a_n)^2$ (обобщение квадрата суммы).
10. Рассмотрим два числа a_1 и a_2 , удовлетворяющие неравенствам $0<a_1<1$, $0<a_2<1$. Тогда, очевидно, $(1-a_1)(1-a_2)=1-a_1-a_2+a_1 a_2>1-a_1-a_2$. Обобщите это утверждение на n чисел и докажите своё обобщение.

---

[3] Не воспринимать уничижительно. Называю так, чтобы отличить две вещи, обозначенные одним словом. Математическая индукция – приём доказательства последовательности утверждений. «Неполная» индукция – эвристический способ угадывать утверждения.

[4] Считается, что формула уже известна (например, как сумма арифметической прогрессии).

[5] Знакопеременная сумма k-х степеней выражается многочленом степени k.

11. Последовательность (b_n) задана рекуррентно: $b_1=3$, $b_{n+1}=7a_n+3$. Докажите, что $b_n=0{,}5(7^n-1)$. Найдите и докажите формулу n-го члена для последовательности (c_n): $c_1=4$, $c_{n+1}=3c_n-2$.

2. «Живая геометрия»

Подражая В.И. Арнольду, можно сказать, что с появлением этой программы[6] школьная геометрия стала экспериментальной наукой.

Программу можно плодотворно использовать на уроках геометрии, предваряя или дополняя теоретический материал экспериментами. Обычно работа происходит в компьютерном классе, чтобы каждый ученик мог экспериментировать самостоятельно (это же самое интересное!). Теоремы переформулируются в виде открытых задач [3]. Факты, открытые экспериментально на одном уроке, можно строго доказать на следующем.

1. Через данную точку внутри окружности проходит хорда. Найдите положение хорды, при котором произведение её отрезков минимально. Сформулируйте и исследуйте аналогичную задачу для точки вне окружности.
2. Выясните, в каких пределах меняется величина $\dfrac{AB\cdot CD+BC\cdot AD}{AC\cdot BD}$ для произвольного четырёхугольника ABCD. Для какого вида четырёхугольников достигаются граничные значения? [Зафиксируйте три вершины и двигайте четвёртую.] *(Теорема Птолемея.)*
3. Инверсия: что будет образом прямой, что будет образом окружности?

Для красивых, но сложных теорем, не имеющих дальнейшего развития в курсе, можно ограничиться экспериментальным открытием с последующей формулировкой.

1. Через вершины треугольника проведены лучи, делящие каждый его угол на три равные части. Исследовать взаимное расположение точек пересечения этих лучей. *(Теорема Морлея.)*
2. Дан треугольник с углами $360^\circ/7$ и $180^\circ/7$. Исследовать взаимное расположение середин сторон и оснований высот. (Находятся в шести вершинах правильного семиугольника!)
3. Построение циклоид (астроиды, кардиоиды и других) – как ГМТ и как огибающих.

Если сложно сделать открытую задачу, можно всем классом попытаться сформулировать теорему по *готовому* динамическому чертежу (теорема о точке пересечения биссектрис, медиан и др., из более сложных – теоремы Паскаля, Понселе).

Беспроигрышный вариант – использовать «Живую геометрию» в задачах на построение.

3. Курс «Экспериментальная геометрия».

Курс почти целиком посвящён фазе поиска в решении открытых задач. Автор проводил его в летней школе интенсивного обучения «Интеллектуал» для учеников, окончивших 7 и 8 класс (большинство из провинции). Дети были разбиты на 4 группы по силам. В течение двух недель с каждой группой было проведено 5 полуторачасовых занятий. Вариант (1) давался двум более слабым группам, вариант (2) – двум более сильным. Занятие проводились в компьютерном классе в «Живой геометрии».

Примерная схема занятия такова. Вначале мы вспоминали 2-3 задачи с предыдущего занятия, проговаривая ещё раз основные идеи (5-7 минут). Затем я разбирал характерную задачу из нового раздела (она помечена нулём), выполняя в «Живой геометрии» построения, которые проецировались на экран для всего класса (10-20 мин). После этого дети включали компьютеры, получали распечатки задания на урок (см. ниже) и решали. Я консультировал в индивидуальном порядке, проверял решения, подсказывал, задавал дополнительные вопросы (см. комментарии к заданиям). В конце занятия в течение 3-5 мин все вместе обсуждали некоторые из решённых задач (чтобы оторвать детей от экспериментирования, приходилось давать команду погасить экраны).

Задания к курсу «Экспериментальная геометрия»

Рекомендуется следующая последовательность действий:
Выполнить построение
Изучить результат

---

[6] Geometry Sketchpad; программу можно скачать на сайте разработчиков www.keypress.com/sketchpad.

Выдвинуть гипотезу
Проверить её для других случаев
Попытаться доказать теоретически (взяв ручку и бумагу!)

*Помните, что любая гипотеза, полученная в ходе эксперимента и выдержавшая его, бросает нам вызов: **доказать.***
Пока гипотеза не доказана (или не опровергнута), вопрос нельзя считать закрытым!

Задачи на построение

1. Постройте середину данного отрезка двумя способами – с помощью циркуля и линейки и с помощью функции «Живой геометрии». (1)
2. Постройте биссектрису данного угла теми же двумя способами. (1)
3. Постройте треугольник по трём сторонам. (1)
4. Постройте прямоугольный треугольник по двум катетам. (1, 2)
5. Постройте прямоугольный треугольник по катету и гипотенузе. (1, 2)
6. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки. (2)
7. Постройте треугольник а) по трём сторонам; б) по трём медианам; в*) по трём высотам; г**) по трём биссектрисам. (2)
8. Постройте треугольник а) по основаниям медиан; б*) по основаниям высот; в**) по основаниям биссектрис. (2)
9. * Восстановите квадрат по четырём точкам, лежащим на его сторонах. (2)

Задачи на минимум и максимум

0. Дан четырёхугольник. Найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин четырёхугольника минимальна. А если он невыпуклый?
1. *Задача Евклида.* Параллелограмм называется вписанным в треугольник, если три вершины параллелограмма лежат на сторонах треугольника, а четвёртая совпадает с вершиной треугольника. Впишите в данный треугольник параллелограмм, так чтобы его площадь была наибольшая. [Зафиксируйте один из углов параллелограмма и исследуйте зависимость его площади от положения одной из вершин, лежащих на стороне этого угла.] Сформулируйте закономерность. (1)
2. Найдите в треугольнике точку, для которой сумма расстояний до сторон треугольника а) минимальна, б) максимальна. *Обобщите на многоугольник. (1)
3. Дан квадрат. Через его центр проведена прямая (в его плоскости). Найти положение прямой, при котором сумма квадратов расстояний прямой до вершин квадрата а) максимальна, б) минимальна (1, 2). Тот же вопрос для произвольной прямой в плоскости квадрата. (2)
4. Дан треугольник. Найдите точку, для которой сумма расстояний до вершин треугольника минимальна. Проверьте, для всех ли треугольников точка минимума суммы расстояний обладает свойством равенства углов? [Рассмотрите треугольник с очень большим углом.[7]] (2)
5. Рассмотрите отношение площади треугольника к квадрату его периметра (S/P^2). Для какого треугольника достигается максимум? Достигается ли минимум? Решите задачу для четырёхугольника; обобщите свои результаты на многоугольники. (2)
6. Найдите точку, для которой сумма квадратов расстояний а) до двух данных точек, б) до трёх данных точек – наименьшая. *Обобщите гипотезу на n точек. (2)
7. Впишите в данный треугольник ABC треугольник наименьшего периметра (так, чтобы на каждой стороне треугольника ABC лежала одна вершина треугольника). [Начните с простых частных случаев.] (2)

Геометрические места точек

Чем точнее опознаете линию, тем лучше. Например, сказать «окружность» лучше, чем «кривая», а понять какой радиус и где центр окружности – совсем хорошо.

---

[7] В задаче о минимуме суммы расстояний до вершин треугольника замечательно то, что для угла больше 120 ° работает другое решение, которого никто не замечает. Это хороший пример того, как легко ошибиться, полагаясь только на эксперимент. В аналогичной задаче про четырёхугольник также различаются решения для выпуклого и невыпуклого. Кстати, задача про минимум в *невыпуклом* четырёхугольнике решается не так-то просто. В замечательной книге Д.О. Шклярского, Н.Н. Ченцова, И.М. Яглома «Геометрические неравенства и задачи на максимум и минимум» неверно не только доказательство, но и ответ. Они утверждают, что минимум будет на пересечении прямых, содержащих диагонали (т.е. та же точка, что и для выпуклого), тогда как «Живая геометрия» даёт вершину «входящего» угла. Этот результат смогли доказать ученики 8 класса школы «Интеллектуал» Илья Львов и Артём Зайцев.

0. В данный угол впишите квадрат, так чтобы две его вершины лежали на одной стороне угла и одна – на другой. Найдите множество четвёртых вершин квадрата.
1. В данный треугольник ABC вписывают всевозможные прямоугольники, у которых одна сторона лежит на прямой AB. Найдите множество центров этих прямоугольников. (1)
2. На плоскости даны окружность и точка A на ней. Найдите множество середин отрезка AN, где N – произвольная точка данной окружности. Рассмотрите также случаи, когда точка N лежит внутри окружности и вне окружности. (1, 2)
3. Рассмотрим всевозможные треугольники ABC, у которых A и B – фиксированные точки окружности, а C – переменная точка окружности. Найдите множество: а) точек пересечения медиан; б) точек пересечения высот; в) точек пересечения биссектрис. (1, 2)
4. а) Лестница, стоявшая на гладком полу у стены, соскальзывает вниз. По какой линии движется котёнок, сидящий на середине лестницы? [Математическая формулировка: Дан прямой угол. Найдите множество середин всевозможных отрезков данной длины d, концы которых лежат на сторонах данного угла.] б) По какой линии будет двигаться котёнок, если он сидит не на середине лестницы? (2)
5. У данной окружности хорда AB закреплена, а хорда CD перемещается, не меняя своей длины. По какой линии движется точка пересечения прямых а) AD и BC, б) AC и BD? (2)

Зачёт (1)

1. Найдите в четырёхугольнике точку, для которой сумма расстояний до вершин – наименьшая. Докажите.
2. На биссектрисе угла взята точка P. Прямая, проходящая через точку P, отсекает на сторонах угла отрезки с длинами a и b. Найдите положение прямой, при которых величина $(\frac{1}{a}+\frac{1}{b})$ имеет 1) наименьшее, 2) наибольшее значение. То же для величины $(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2})$.
3. Даны две точки A и B. Найдите множество оснований перпендикуляров, опущенных из точки A на всевозможные прямые, проходящие через точку B. Попробуйте доказать.

Зачёт (2)

1. Найдите на плоскости точку, для которой сумма расстояний до 4 данных точек минимальна. Докажите.
2. Концы отрезка данной длины скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию середины отрезка. Докажите.[8]
3. Откройте в Живой геометрии файл «Эллипс».[9] Скопируйте его в свой зачётный файл. С его помощью ответьте на следующие вопросы:
    1) Можно ли получить из эллипса окружность? Отрезок?
    2) Представьте себе, что эллипс – зеркальный. Как пойдёт после отражения луч, вышедший из фокуса?
    3) Найдите множество оснований перпендикуляров, проведённых из фокуса эллипса ко всем касательным к эллипсу.
    4) Найдите положение касательной, для которой произведение расстояний до обоих фокусов 1) наибольшее, 2) наименьшее.
    5) Найдите множество точек, симметричных фокусу эллипса относительно всех касательных к нему.

Комментарии к заданиям.

Значительная часть задач на построение взята из брошюры [7], а задач на ГМТ – из книги [8]. Разумеется, формулировки изменялись нужным мне образом; при этом использовались приёмы, изложенные в статье [3].

Я исходил из того, что технические навыки лучше приобретать в процессе осмысленной деятельности. Разбирая «нулевую» задачу, я называл используемые функции (в задачах на минимум и максимум это измерение отрезков, площадей и углов, в задачах на ГМТ функция «оставлять след», «стирать след» и т.д.), а детям тут же приходилось

---

[8] Задачи про минимум в четырёхугольнике и про котёнка имеют простые и наглядные доказательства, которые мы не упустили разобрать. На зачёте нужно было лишь воспроизвести их, но многие не смогли этого сделать; видимо, помешала установка на экспериментальность. Может быть, стоит оградить учеников от соблазна бездумного экспериментирования не только призывами, но и организационно: скажем, ученик должен доказать половину сформулированных им гипотез, иначе результат не засчитывается (или треть, или две трети – доля зависит от сложности темы и уровня ученика).

[9] *Решение по готовому чертежу* – полезный приём, когда создание заготовки требует большой технической или теоретической подготовки. С помощью функции «Живой след» я построил эллипс; можно было двигать фокусы и менять касательную. См. на сайте разработчиков www.keypress.com/sketchpad интересные заготовки (впрочем, довольно бессистемные).

применять их для решения содержательных задач. Таким образом, работать с программой учились по ходу дела, достаточно быстро.

Задачи можно было решать в любом порядке. Как правило, сильные дети успевали решить почти всё, слабые – примерно половину.

Полезно обсудить с ребёнком, решившим задачу, границы применимости, количество решений и т.д. Так, в задаче о построении треугольника по трём сторонам я спрашивал, при каком соотношении длин отрезков он исчезает и почему; в задаче о построении окружности через две точки – сколько бывает решений в зависимости от расположения точек. Давал время подумать; по «живому чертежу» соображали очень хорошо.

За все 5 занятий ставилась одна оценка – за зачётное задание. Зачёт выполнялся на компьютере, как и все задания. Задачи записывались в один файл, который сохранялся в условленном месте под фамилией решающего. Оценивались работающие построения и гипотезы, сформулированные словами. Важна была конкретность гипотез, например, утверждение «это окружность» оценивалось в 1 балл, а утверждение «это окружность с центром в одном из фокусов и радиусом, равным сумме расстояний» – в 3 балла. Если ученик забывал в задаче о четырёхугольнике рассмотреть невыпуклый, то получал меньший балл. Специально я об этом на зачёте не напоминал. Самый хороший результат – 15 баллов из 15, самый плохой – 4 балла. (Я посчитал, что этого хватает на зачёт. Всё-таки человек научился в «Живой геометрии» строить, измерять...)

Чтобы выдвинуть адекватную гипотезу, детям постоянно приходилось ставить и решать вспомогательные задачи типа *Даны окружность и две точки на ней. Определить с их помощью ещё две точки.* Простейшее симметричное решение – пересечение серединного перпендикуляра с окружностью – и даёт ответ. Другие вспомогательные задачи: *Через какие исходные данные можно выразить радиус полученной окружности, положение её центра и т.д.*

Лучшие решения в течение курса я собирал, а потом вместе с программой «Живая геометрия» записал их на диск, который вручался каждому школьнику вместе с дипломом.

4. Вычислительная математика

Школьный предмет математика призван дать понятие о науке с тем же названием. Между тем, многие важные тенденции науки математики даже близко не представлены в школьном курсе. Например, практически игнорируется вычислительная математика, которая имеет прямое отношение к нашей теме. «…вся область собственно вычислительной математики состоит как бы из двух подобластей: малой подобласти, где рассматриваются сравнительно простые задачи и где результаты рассмотрения можно представить в виде серии теорем, и громадной подобласти, связанной с решением практических задач, где никаких теорем нет. Здесь успехи в решении задач связаны с проведением численных экспериментов. Придумаем модель. Посчитаем. Получилось – хорошо, не получилось – подумаем в чём дело, пересмотрим исходную модель и т.д. Такова стандартная схема работы современного вычислителя.» [9, с. 7].

Простые задачи, идеи и методы вычислительной математики вполне могут стать достоянием физматклассов. Но, разумеется, не только и не столько в виде «серии теорем», сколько в виде вычислительного практикума.

Цели такого практикума:

1) Показать, что далеко не все задачи решаются аналитически.
   Из теперешней школьной математики это никак не увидишь.
2) Научить приближённым вычислениям.
   Грамотно считать, округлять, брать нужное число знаков почти никто не умеет.
3) Заполнить пустоту между школьной информатикой и школьной математикой.
   Одни учат Word, другие решают внутренние программистские задачи.

Наиболее естественно приурочить практикум к началам анализа в 10-11 классах.

Темы практикума по вычислительной математике

Изучать итерационные процессы, сходимость, точки покоя, их устойчивость, зоны притяжения;
исследовать сходимость рядов и находить суммы рядов с заданной точностью;
находить асимптотически коэффициенты степенного представления функций $\sin x$, $\sqrt{1+x}$, $\ln(1+x)$, e^x, $\frac{1}{1+x}$ (пропедевтика многочлена Тейлора);
применять многочлен Тейлора для приближённых вычислений;
строить графики многочленов Тейлора небольших степеней для многочленов и для функций $\sin x$, $\tan x$, $\frac{1}{1+x^2}$ и других, определять область сходимости;

строить простейшие графики функций двух переменных, находить линии уровня, изучать их перестройку с изменением «высоты»;
строить интерполяционные многочлены для тестовых функций (например $y=\sin x$, $x\in[0,\pi]$) на равномерной и неравномерной сетке, сравнивать погрешности;
строить интерполяционные многочлены и их графики по экспериментальным точкам;
сравнивать точность различных квадратурных формул (прямоугольников, трапеций, Симпсона) для тестовых функций ($y=x^m$, а также негладких);
находить квадратуры (например, площадь сегмента эллипсов) по различным квадратурным формулам;
вычислять с заданной точностью интегралы, не берущиеся аналитически;
находить длины дуг кривых (например, эллипсов, парабол);
решать уравнения типа $\sin x=0{,}5x$, $\tan x=x$ и алгебраические уравнения высоких степеней (методом итераций, методом касательных Ньютона);
составить таблицу синусов с шагом в 1° с помощью интерполяционного многочлена;
вычислять π с большим числом десятичных знаков из разных представлений этого числа в виде предела периметров вписанных многоугольников, суммы ряда, бесконечного произведения, цепной дроби, статистики «бросания иголки» и т.д; аналогично число e ;
решать численно дифференциальные уравнения методом Эйлера, применением разностных схем.

Темы исследовательских задач по математике, примыкающих к курсу анализа и вычислительному практикуму

1. Решение сложных уравнений методом итераций. «Зоны притяжения» начальных приближений.
2. Исследование устойчивости интерполяционного многочлена к погрешностям значений функции в узлах в зависимости от расположения узлов.
3. Приближение периодических функций тригонометрическими суммами. Приближение разрывных функций.
4. Расчёт движения ракеты с Земли на Луну.
5. Расчёт падения камня в атмосфере.
6. Экстраполяция как способ прогнозирования (расход топлива на корабле, денег на телефоне, время прибытия и т.д.).

Продолжение следует

Описанный опыт в целом оказался удачным. Это укрепило мою уверенность в теоретических соображениях, лежащих в его основе. Именно, традиционная евклидовская манера преподавания математики по схеме «аксиома – определение – теорема – доказательство» не является единственной адекватной математическому мышлению. Между тем, для многих учеников такая форма изложения усложняет восприятие материала. Положение можно улучшить, если «смягчить» дедуктивную манеру: предварять теоретические построения фазой эксперимента, поиска, «работы руками», которая включит ученика в материал, поможет осознать проблему и, как следствие, по достоинству оценить эти построения. Такая последовательность не только психологически облегчает восприятие материала, но во многих случаях отвечает историческому развитию науки. Не говоря уже о том, что фаза эксперимента даёт редкую возможность развить исследовательские умения [3, 4].

Задания, подобные предложенным выше, естественным образом возникают во многих темах. Например, полезна экспериментальная пропедевтика темы «Пределы» (см. тема «Угадай предел», с. 43, 44 в книге [3]). Ждёт достойного воплощения в физматклассах практикум по вычислительной математике. Далеко не исчерпаны и возможности экспериментальной геометрии.

Призываю к сотрудничеству всех, кому интересна экспериментальная математика. Мой электронный адрес sgibnev@mccme.ru. Буду признателен за соображения, задачи.

Литература

[1] Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. – М.: Изд-во Иностр. Лит. – 1957. (G. Polya. Mathematics and plausible reasoning. Princeton, New Jersey, 1954.)
[2] Арнольд В.И. Динамика, статика и проективная геометрия полей Галуа. – М.: Изд-во МЦНМО. – 2005.
[3] Сгибнев А.И. Как задавать вопросы? Приложение «Математика» к газете «1 сентября», N 12, 2007.

[4] Сгибнев А.И. Исследуем на уроке и на проекте. / В сборнике «Учим математике» (материалы открытой школы-семинара учителей математики). Под ред. А.Д. Блинкова, И.Б. Писаренко, И.В. Ященко. – М.: МЦНМО, 2006. С. 59-71.

[5] Задачи по математике, предлагавшиеся ученикам математического класса 57 школы (выпуск 2004 года, класс «Д») / Под ред. В. Доценко. – М.: МЦНМО, 2004.

[6] Галицкий М.Л., Гольдман А.М., Звавич Л.И. Сборник задач по алгебре для 8-9 классов. М.: Просвещение. – 1992.

[7] Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. – М.: МЦНМО. – 2003.

[8] Васильев Н.Б., Гутенмахер В.Л. Прямые и кривые. – М.: МЦНМО. – 2004.

[9] Шноль Э.Э. Семь лекций по вычислительной математике. – Пущино, 1992.